ENS, 1997, épreuve commune Cachan-Ulm

(11 pages)

Pour la résolution de ce problème, je fais plusieurs fois appel à des résultats n'apparaissant pas dans le programme officiel MP mais, pour certains (pas tous), dans "l'annexe MP", posant d'ailleurs la question du statut des approfondissements présents dans cette annexe: peuvent-ils être utilisés sans démonstration par les candidats ? sont-ils exigibles ?*
Ces résultats sont repérés par [**HP** x] *et commentés en annexe.*

Partie I

I. 1. Puisque f est C^2, on dispose de la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 [**HP 1**]: $f(u) = f(0) + Df(0)u + \frac{1}{2}\left(u_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) + 2u_1u_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0) + u_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)\right) + o\big(|u|^2\big)$. On a donc bien $\underline{\mathcal{N}(u) = O\big(|u|^2\big) \text{ au voisinage de } 0}$.

I. 2. Le théorème d'inversion locale [**HP 2**] donne, puisque f est C^2 sur $\mathbf{R}^2$ et que $Df(0)$ est inversible,

$$\exists\, U_1 \in \mathcal{V}(0),\ \exists\, V_1 \in \mathcal{V}(f(0)) = \mathcal{V}(0),\ \exists\, g : U_1 \mapsto V_1 \text{un } C^2 \text{ difféomorphisme, tels que } f\big|_{U_1} = g$$

Soit $R_0 > 0$ tel que $B_o(0,R_0) \subset V_1$ ($B_o(0,R_0)$ désigne la boule ouverte de cenre 0 et rayon R_0) et $U = g^{-1}\big(B_o(0,R_0)\big)$. U est un ouvert en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue, $0 \in U$ donc $U \in \mathcal{V}(0)$ et $f\big|_U = g\big|_U$ est un C^2 difféomorphisme de U sur $g(U) = B_o(0,R_0)$.

$$\underline{\exists\, R_0 > 0,\ \exists\, U \in \mathcal{V}(0),\ U \text{ ouvert, tels que } f\big|_U\ C^2 \text{ difféomorphisme de } U \text{ sur } B_o(0,R_0)}\ .$$

I. 3. Montrons les résultats par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, $(x,y) = (x(0),y(0)) \in B(0,R)$ et $(x(0),y(0)) = f^{-0}(x,y)$. Si les résultats sont vrais pour n, $f^{-n}(x,y) = (x(n),y(n)) \in B(0,R)\cap U \subset B_o(0,R_0)$ donc $f^{-1}\big(f^{-n}(x,y)\big) = f^{-n-1}(x,y)$ est défini. D'autre part, $(x(n),y(n)) \in U$ et $(x(n+1),y(n+1)) \in B(0,R) \subset B_o(0,R_0)$ donc $(x(n),y(n)) = f\big((x(n+1),y(n+1))\big) \Longrightarrow (x(n+1),y(n+1)) = f^{-1}\big((x(n),y(n))\big) = f^{-1}\big(f^{-n}(x,y)\big) = f^{-n-1}(x,y)$ et donc $f^{-n-1}(x,y) \in B(0,R)$.
Donc $\underline{\forall (x,y) \in \mathcal{M}_i(R),\ \forall n \geq 0,\quad f^{-n}(x,y) \text{ est défini},\ f^{-n}(x,y) \in B(0,R),\ (x(n),y(n)) = f^{-n}(x,y)}$.

I. 4. a. $f(x,y) = (\frac{1}{2}x, 2y) + O\big(|(x,y)|^2\big) = (\frac{1}{2}x, 2y) + o\big(|(x,y)|\big)$ donc $Df(0)\big((x,y)\big) = (\frac{1}{2}x, 2y)$ et $\underline{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

I. 4. b. $\diamond$ $\mathcal{M}_s(R)$ est toujours défini pour tout $R > 0$ et, ici, $f^n(x,y) = (\frac{1}{2^n}x, 2^n y)$ donc $(x,y) \in \mathcal{M}_s(R)$ si et seulement si $\forall n,\ \mathrm{Max}\big(\frac{1}{2^n}|x|, 2^n|y|\big) \leq R$ et $(\frac{1}{2^n}x, 2^n y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$. Ceci implique que $y = 0$ et, pour $n = 0$, $|x| \leq R$. Réciproquement, $|x| \leq R \Rightarrow \forall n,\ \frac{1}{2^n}|x| \leq R$ donc, finalement, $\underline{\mathcal{M}_s(R) = \big\{(x,0) \mid |x| \leq R\big\}}$.

$\diamond$ Ici, f^{-1} est définie sur $\mathbf{R}^2$ car f est un endomorphisme inversible.
D'après **I.3.**, $\mathcal{M}_i(R) \subset \big\{(x,y) \mid \forall n,\ \big|f^{-n}(x,y)\big| \leq R \text{ et } f^{-n}(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\big\}$, mais, si (x,y) appartient à ce dernier ensemble, en prenant $U = \mathbf{R}^2$, la suite définie par $(x(n),y(n)) = f^{-n}(x,y)$ appartient à $\big(B(0,R)\cap U\big)^{\mathbf{N}}$ et vérifie $(x(n),y(n)) = f\big((x(n+1),y(n+1))\big)$, $(x(0),y(0)) = (x,y)$ et $(x(n),y(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\mathcal{M}_i(R) =$

$\big\{(x,y)\mid \forall n,\ \left|f^{-n}(x,y)\right|\le R$ et $f^{-n}(x,y)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\big\}$. Et donc, comme ci-dessus et puisque $f^{-1}(x,y)=(2x,\frac{1}{2}y)$, $\underline{\mathcal{M}_i(R)=\big\{(0,y)\mid |y|\le R\big\}}$.

I. 5. On a $g(x,y)=+o\big(|(x,y)|\big)$ donc $Dg(0)=0$. Munissons $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ de la norme subordonnée $|||L|||=\operatorname*{Sup}_{u\neq 0}\dfrac{|L(u)|}{|u|}$. $v\mapsto |||Dg(v)|||$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ comme composée d'applications continues et donc $\exists\, R_g>0,\ |v|<R_g\Rightarrow |||Dg(v)|||\le\alpha$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur $B_o(0,R_g)$, $\forall (v,v')\in\big(B_o(0,R_g)\big)^2,\ |g(v)-g(v')|\le\alpha|v-v'|$. De même, $\exists\, R_h>0,\ \forall (v,v')\in\big(B_o(0,R_h)\big)^2,\ |g(v)-g(v')|\le\alpha|v-v'|$.
Prenons finalement $0<R_1<\operatorname{Min}(R_g,R_h,R_0)$, on a $\underline{R_1\in]0,R_1[}$ et on a $\underline{\forall\big((x,y),(x',y')\big)\in B(0,R_1),}$

$$\underline{|g(x,y)-g(x',y')|\le\alpha|(x-x',y-y')| \text{ et } |h(x,y)-h(x',y')|\le\alpha|(x-x',y-y')|}\ .$$

I. 6. a. $\diamond$ Puisque $(\lambda,\mu)\in c^0$ et par continuité de g et h,

$$\left(\frac{1}{2}\lambda(n-1)+g\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big),\frac{1}{2}\Big[\mu(n+1)-h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\Big]\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\left(0+g(0,0),\frac{1}{2}\big[0-h(0,0)\big]\right)=0$$

donc $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)\in c^0$.
$\diamond$ D'autre part, pour $n\ge 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\Big[\mu(n+1)-h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\Big]\right| &\le \frac{1}{2}\Big[|\mu(n+1)|+\big|h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\big|\Big]\le\frac{1}{2}\Big[R+\big|h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)-h(0,0)\big|\Big]\\ &\le\frac{1}{2}\Big[R+\alpha\big|(\lambda(n),\mu(n))\big|\Big]\le\frac{1}{2}\Big[R+\alpha R\Big]\le\frac{3}{4}R\le R\end{aligned}$$

et, pour $n=0$, $|x|\le R$ et, pour $n\ge 1$, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\lambda(n-1)+g\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)\right| &\le\frac{1}{2}|\lambda(n-1)|+\big|g\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)\big|\\ &\le\frac{R}{2}+\alpha\big|(\lambda(n-1),\mu(n-1))\big|\le\frac{R}{2}+\alpha R\le R\end{aligned}$$

donc $\underline{\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)\in c^0(R)}$.

I. 6. b. On a :

$$\Big|\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)(n)-\chi_R\big(x,(\lambda',\mu')\big)(n)\Big|=\big|(a(n),b(n))\big|=\operatorname{Max}\big(|a(n)|,|b(n)|\big)$$

avec, pour $n\ge 1$, $a(n)=\frac{1}{2}\big(\lambda(n-1)-\lambda'(n-1)\big)+g\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)-g\big(\lambda'(n-1),\mu'(n-1)\big)$, $a(0)=0$ et $b_n=\frac{1}{2}\Big[\mu(n+1)-\mu'(n+1)-h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)+h\big(\lambda'(n),\mu'(n)\big)\Big]$. Et on a, pour $n\ge 1$,

$$\begin{aligned}|a(n)| &\le\frac{1}{2}\big|\lambda(n-1)-\lambda'(n-1)\big|+\big|g\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)-g\big(\lambda'(n-1),\mu'(n-1)\big)\big|\\ &\le\frac{1}{2}\big|\lambda(n-1)-\lambda'(n-1)\big|+\alpha\big|\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)-\big(\lambda'(n-1),\mu'(n-1)\big)\big|\\ &\le\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\big\|(\lambda,\mu)-(\lambda',\mu')\big\|_\infty\end{aligned}$$

et, pour $n\ge 0$,

$$\begin{aligned}|b(n)| &\le\frac{1}{2}\left[|\mu(n+1)-\mu'(n+1)|+\big|h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)-h\big(\lambda'(n),\mu'(n)\big)\big|\right]\\ &\le\frac{1}{2}\left[|\mu(n+1)-\mu'(n+1)|+\alpha\big|\big(\lambda(n),\mu(n)\big)-\big(\lambda'(n),\mu'(n)\big)\big|\right]\\ &\le\frac{1}{2}(1+\alpha)\big\|(\lambda,\mu)-(\lambda',\mu')\big\|_\infty\le\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\big\|(\lambda,\mu)-(\lambda',\mu')\big\|_\infty\end{aligned}$$

donc $\underline{\left\|\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)-\chi_R\big(x,(\lambda',\mu')\big)\right\|_\infty \le \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left\|(\lambda,\mu)-(\lambda',\mu')\right\|_\infty}$.

I. 6. c. $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)(n)-\chi_R\big(x,(\lambda',\mu')\big)(n)=\begin{cases}(x-x',0) & \text{si } n=0\\ (0,0) & \text{si } n\ge 1\end{cases}$ donc $\underline{\left\|\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)-\chi_R\big(x',(\lambda,\mu)\big)\right\|_\infty=|x-x'|}$.

I. 7. $\diamond$ φ_s est une contraction d'une partie fermée d'un espace vectoriel normé complet donc le théorème du point fixe **[HP 3]** donne directement que $\underline{\varphi_s \text{ admet un unique point fixe dans } B_R}$.

$\diamond$ $N\big(u(s_1)-u(s_2)\big)=N\big(\varphi_{s_1}(u(s_1))-\varphi_{s_2}(u(s_2))\big)\le N\big(\varphi_{s_1}(u(s_2))-\varphi_{s_2}(u(s_2))\big)+N\big(\varphi_{s_1}(u(s_1))-\varphi_{s_1}(u(s_2))\big)$
$\le c|s_1-s_2|+tN\big(u(s_1)-u(s_2)\big)$

donc $N\big(u(s_1)-u(s_2)\big)\le \dfrac{c}{1-t}|s_1-s_2|$ donc $\underline{u \text{ est lipschitzienne}}$.

I. 8. a. En notant $\varphi_x=\chi_R\big(x,.\big)$ l'application $(\lambda,\mu)\longmapsto \chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)$, on a d'après **I.6.a.** que φ_x est définie sur $c^0(R)$ et à valeurs dans $c^0(R)$, d'aprés **I.6.b.** que φ_x est t-lipschitzienne avec $t=\frac{1}{2}+\alpha\in]0,1[$ et d'aprés **I.6.c.** que $\left\|\varphi_x((\lambda,\mu))-\varphi_{x'}((\lambda,\mu))\right\|_\infty\le|x-x'|$ pour $(x,x')\in[-R,R]$. Pour pouvoir appliquer le résultat de **I.7.** il suffit donc de montrer que $\big(c^0,\|\ \|_\infty\big)$ est complet.

Or on sait que si E est un espace vectoriel normé complet et A une partie d'un espace vectoriel normé, $\big(\mathcal{B}(A,E),\|\ \|_\infty\big)$ est complet **[HP 4]**. En particulier, $\mathcal{B}(\mathbf{N},\mathbf{R}^2)$ est complet. Il suffit donc de montrer que c^0 est une partie fermée de $\mathcal{B}(\mathbf{N},\mathbf{R}^2)$. Soit donc $\big((\lambda_p,\mu_p)\big)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de c^0 qui converge dans $\mathcal{B}(\mathbf{N},\mathbf{R}^2)$ vers (λ,μ). On a donc $(\lambda_p,\mu_p)\xrightarrow{\mathcal{U}}(\lambda,\mu)$ sur $\mathbf{N}$ et, comme $\forall p$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda_p(n),\mu_p(n))=(0,0)$ le théorème d'interversion des limites donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda(n),\mu(n))=(0,0)$ donc $(\lambda,\mu)\in c^0$. On en déduit c^0 fermé donc complet ce qui achéve la démonstration.

Donc $\underline{\text{il existe un unique } (\lambda,\mu)\in c^0(R) \text{ tel que } \chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)=(\lambda,\mu)}$.

I. 8. b. Pour $R\in]0,R_1]$, on a $c^0(R)\subset c^0(R_1)$ et, pour $x\in[-R,R]$, $\chi_R\big(x,.\big)=\chi_{R_1}\big(x,.\big)\big|_{c^0(R)}$. On a donc $(\lambda_x^R,\mu_x^R)=\chi_R\big(x,(\lambda_x^R,\mu_x^R)\big)=\chi_{R_1}\big(x,(\lambda_x^R,\mu_x^R)\big)$ donc, par unicité du point fixe de $\chi_{R_1}\big(x,.\big)$, $\underline{(\lambda_x^R,\mu_x^R)=(\lambda_x^{R_1},\mu_x^{R_1})}$.

I. 9. a. $\diamond$ En appliquant **I.7.**, on obtient que $\begin{array}{ccc}[-R_1,R_1] & \to & c^0(R_1)\\ x & \mapsto & (\lambda_x^{R_1},\mu_x^{R_1})\end{array}$ est lipschitzienne donc, par définition,
$\underline{\begin{array}{ccc}[-R_1,R_1] & \to & c^0\\ x & \mapsto & (\lambda_x,\mu_x)\end{array} \text{ est lipschitzienne}}$.

$\diamond$ Pour $(x,x')\in[-R_1,R_1]^2$, $|\psi(x)-\psi(x')|=|\mu_x(0)-\mu_{x'}(0)|\le\big|(\lambda_x(0),\mu_x(0))-(\lambda_{x'}(0),\mu_{x'}(0))\big|\le\big\|(\lambda_x,\mu_x)-(\lambda_{x'},\mu_{x'})\big\|_\infty\le k|x-x'|$ donc $\underline{\psi \text{ est lipschitzienne}}$.

I. 9. b. $\diamond$ Puisque $(x,y)\in\mathcal{M}_s(R)$, $f^n(x,y)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\forall n$, $|f^n(x,y)|\le R$ donc la suite $\big(f^n(x,y)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $c^0(R)$.
Posons $f^n(x,y)=(\lambda(n),\mu(n))$, on a $(\lambda(0),\mu(0))=(x,y)$ et, pour $n\ge1$,

$$(\lambda(n),\mu(n))=\Big(\frac{1}{2}\lambda(n-1)+g\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big),2\mu(n-1)+h\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)\Big)$$

ou aussi $\mu(n+1)=2\mu(n)+h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)$ d'où on tire $\mu(n)=\frac{1}{2}\Big[\mu(n+1)-h\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\Big]$. Donc $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)(0)=(x,\mu(0))=(x,y)$ et, pour $n\ge1$, $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)(n)=(\lambda(n),\mu(n))$ donc $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)=(\lambda,\mu)$ et donc, par unicité du point fixe, $\underline{\big(f^n(x,y)\big)_{n\in\mathbf{N}}=(\lambda_x,\mu_x)}$.

$\diamond$ En particulier, $y=\mu_x(0)$ et on a $|x|\le R$ donc $\underline{\mathcal{M}_s(R)\subset\big\{(x,\psi(x))\ |\ |x|\le R\big\}}$.

I. 9. c. $\diamond$ Montrons par récurrence sur n que $(\lambda_x(n),\mu_x(n))=f^n(x,\psi(x))$.
Pour $n=0$, on a $(\lambda_x(0),\mu_x(0))=\chi_R\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big)(0)=(x,\frac{1}{2}[\mu(1)-h(\lambda(0),\mu(0))])$ donc $\lambda_x(0)=x$ et $\mu_x(0)=\psi(x)$ par définition. Si ceci est vrai pour $n-1$,

$$\begin{aligned}f^n(x,\psi(x))&=f(\lambda_x(n-1),\mu_x(n-1))\\&=\Big(\frac{1}{2}\lambda_x(n-1)+g(\lambda_x(n-1),\mu_x(n-1)),2\mu_x(n-1)+h(\lambda_x(n-1),\mu_x(n-1))\Big).\end{aligned}$$

Or la definition de (λ_x, μ_x) donne $\forall n \geq 0,\ \mu_x(n) = \frac{1}{2}[\mu_x(n+1) - h(\lambda_x(n), \mu_x(n))])$ donc $2\mu_x(n-1) + h(\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1)) = \mu_x(n)$ et $\forall n \geq 1,\ \lambda_x(n) = \frac{1}{2}\lambda_x(n-1) + g(\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1))$ ce qui donne bien $f^n(x, \psi(x)) = (\lambda_x(n), \mu_x(n))$.
Donc $\underline{\forall x \in [-R_1, R_1],\ (\lambda_x, \mu_x) = \big(f^n(x, \psi(x))\big)_{n \in \mathbf{N}}}$.

$\diamond$ Or $(\lambda_x, \mu_x) \in c^0(R)$ donc $f^n(x, \psi(x)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\forall n,\ |f^n(x, \psi(x))| \leq R$ et donc $(x, \psi(x)) \in \mathcal{M}_s(R)$. Avec le résultat du **b.**, on obtient $\underline{\mathcal{M}_s(R) = \big\{(x, \psi(x)) \mid |x| \leq R\big\}}$.

I. 9. d. On a $Df^{-1}(0) = \big(Df(0)\big)^{-1}$ de matrice dans la base canonique $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Il suffit d'inverser les rôles de x et y en considérant $\tilde{f} = s \circ f^{-1} \circ s$ avec $s :\ (x, y) \mapsto (y, x)$. $\tilde{f}$ est C^2 sur $\mathbf{R}^2$ de différentielle en 0 $D\tilde{f}(0) = s \circ Df^{-1}(0) \circ s$ ($Ds(0) = s$ car s linéaire) de matrice dans la base canonique A. Or, comme en **I.4.b.**, $\mathcal{M}_i(R) = \big\{(x, y) \mid \forall n,\ \big|f^{-n}(x, y)\big| \leq R$ et $f^{-n}(x, y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\big\}$ et $f^{-n} = s \circ \tilde{f}^n \circ s$ donc

$$\underline{\exists\, R_2,\ \forall R \in]0, R_2],\quad \mathcal{M}_i(R) = \big\{(\theta(y), y) \mid |y| \leq R\big\} \text{ avec } \theta \text{ lipschitzienne sur } [R_2, R_2]}\ .$$

Partie II

II. 1. a. La décomposition du polynôme caractéristique de $Df(0)$, P_A, en produit de polynômes premiers dans $\mathbf{R}[X]$ s'écrit :

$$P_A(X) = \prod_{1 \leq i \leq p} \big(X - \lambda_i\big)^{\alpha_i} \prod_{1 \leq j \leq m} \big(X^2 + b_j X + c_j\big)^{\beta_j}$$
$$\text{avec } \big(\lambda_i\big)_{1 \leq i \leq p} \text{ les racines de } P_A \text{ et } b_j^2 - 4c_j < 0\,.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton nous donne $P_A\big(Df(0)\big) = 0$ donc $\mathbf{R}^d = \operatorname{Ker}\Big(P_A\big(Df(0)\big)\Big)$ et le théorème de décomposition des noyaux donne, puisque les facteurs ci-dessus sont premiers entre eux,

$$\underline{\mathbf{R}^d = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \big(Df(0) - \lambda_i \mathrm{Id}\big)^{\alpha_i} \bigoplus_{1 \leq j \leq m} \big((Df(0))^2 + b_j Df(0) + c_j \mathrm{Id}\big)^{\beta_j}}\ .$$

II. 1. b. Pour simplifier l'écriture, posons $D'_+ = \big\{i \text{ tels que } |\lambda_i| > 1\big\}$ et $D'_- = \big\{i \text{ tels que } |\lambda_i| < 1\big\}$. Puisque P_A n'a aucune racine de module 1, D'_+ et D'_- forment une partition de $\big\{i,\ 1 \leq i \leq p\big\}$ et D_+, D_- forment une partition de $\big\{j,\ 1 \leq j \leq m\big\}$ donc $\underline{\mathbf{R}^d = E_+ \oplus E_-}$.

II. 1. c. $\diamond$ Soit $Q_\varepsilon = \prod_{i \in D'_\varepsilon} \big(X - \lambda_i\big)^{\alpha_i} \prod_{j \in D_\varepsilon} \big(X^2 + b_j X + c_j\big)^{\beta_j}$ pour $\varepsilon = +$ ou $-$. Le théorème de décomposition des noyaux donne $E_\varepsilon = \operatorname{Ker}\big(Q_\varepsilon(Df(0))\big)$. En particulier $\underline{E_+ \text{ et } E_- \text{ sont stables par } Df(0)}$.

$\diamond$ Plaçons nous dans $\mathbf{C}^d$ muni de la norme hermitienne canonique notée aussi $\|\ \|_2$ et, en identifiant A à l'élément de $\updownarrow(\mathbf{C}^d)$ de matrice A dans la base canonique, posons $F_\varepsilon = \operatorname{Ker}(Q_\varepsilon(A))$.
On peut écrire $Q_-(X) = \prod_{1 \leq k \leq q} \big(X - \nu_k\big)^{\gamma_k}$ où les ν_k sont les racines dans $\mathbf{C}$ de Q_- donc $|\nu_k| < 1$. Donc $F_- = \bigoplus_{1 \leq k \leq q} \operatorname{Ker}\Big(\big(A - \nu_k \mathrm{Id}\big)^{\gamma_k}\Big)$. Soit $x \in E_- \subset F_-$, x s'écrit $x = \sum_{k=1}^{q} x_k$ avec $x_k \in \operatorname{Ker}\Big(\big(A - \nu_k \mathrm{Id}\big)^{\gamma_k}\Big)$ et alors $(Df(0))^n x = A^n x = \sum_{k=1}^{q} A^n x_k$. Or $\operatorname{Ker}\Big(\big(A - \nu_k \mathrm{Id}\big)^{\gamma_k}\Big)$ est stable par A, notons A_k l'endomorphisme de $\operatorname{Ker}\Big(\big(A - \nu_k \mathrm{Id}\big)^{\gamma_k}\Big)$ induit par A, on a $\big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^{\gamma_k} = 0$ donc

$$A_k^n = \big(\nu_k \mathrm{Id} + A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^n = \sum_{i=0}^{\gamma_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} \nu_k^{n-i} \big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^i$$

(égalité valable même pour $0 \le n < \gamma_k$). Donc

$$(Df(0))^n x = \sum_{k=1}^{q} \left[\sum_{i=0}^{\gamma_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} \nu_k^{n-i} \big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^i x_k \right]$$

et donc

$$\|(Df(0))^n x\|_2 \le \sum_{k=1}^{q} \left[\sum_{i=0}^{\gamma_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} |\nu_k|^{n-i} |||\big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^i||| \, \|x_k\|_2 \right] .$$

Mais $x_k = p_k(x)$ où $\big(p_k\big)_{k=1,\dots,q}$ est la famille de projections associée à la somme directe donc $\|x_k\|_2 \le |||p_k||| \|x\|_2$. Donc

$$\|(Df(0))^n x\|_2 \le \|x\|_2 \sum_{k=1}^{q} \left[\sum_{i=0}^{\gamma_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} |\nu_k|^{n-i} |||\big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^i||| \, |||p_k||| \right] .$$

Soit γ_- telle que $1 > \gamma_- > \underset{k=1,\dots,q}{\mathrm{Max}} |\nu_k|$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma_-^n} \sum_{k=1}^{q} &\left[\sum_{i=0}^{\gamma_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} |\nu_k|^{n-i} |||\big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^i||| \, |||p_k||| \right] \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left[\sum_{i=0}^{\gamma_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i! |\nu_k|^i} \left| \frac{\nu_k}{\gamma_-} \right|^n |||\big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^i||| \, |||p_k||| \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\end{aligned}$$

car $\left| \dfrac{\nu_k}{\gamma_-} \right| < 1$. Donc

$$\exists\, c_- > 0, \quad ,\forall n \ge 0,\ \frac{1}{\gamma_-^n} \sum_{k=1}^{q} \left[\sum_{i=0}^{\gamma_k} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} |\nu_k|^{n-i} |||\big(A_k - \nu_k \mathrm{Id}\big)^i||| \, |||p_k||| \right] \le c_-$$

et donc, finalement,

$$\underline{\exists\, \gamma_- \in]0,1[,\ \exists\, c_- > 0, \qquad \forall x \in E_-,\ \forall n \ge 0, \quad \|(Df(0))^n x\|_2 \le c_- \gamma_-^n \|x\|_2} .$$

◇ A et A^{-1} commutant, F_+ est stable par A^{-1} et les valeurs propres de l'endomorphisme de F_+ induit par A^{-1} sont les inverses de celles de l'endomorphisme de F_+ induit par A. Elles sont donc de module strictement inférieur à 1 et donc, comme ci-dessus,

$$\underline{\exists\, \gamma_+ \in]0,1[,\ \exists\, c_+ > 0, \qquad \forall y \in E_+,\ \forall n \ge 0, \quad \|(Df(0))^{-n} y\|_2 \le c_+ \gamma_+^n \|y\|_2}$$

et, en prenant $\gamma = \mathrm{Max}\big(\gamma_-, \gamma_+\big)$ et $c = \mathrm{Max}\big(c_-, c_+\big)$, on a

$$\underline{\exists\, \gamma \in]0,1[,\ \exists\, c > 0, \quad \forall n \ge 0, \big(\forall x \in E_-,\ \|(Df(0))^n x\|_2 \le c\gamma^n \|x\|_2 \text{ et } \forall y \in E_+,\ \|(Df(0))^{-n} y\|_2 \le c\gamma^n \|y\|_2\big)} .$$

II.1. d. ◇ Les deux suites $\big(\gamma^{-n} \|(Df(0))^n\|_2 P_- u\big)_{n \ge 0}$ et $\big(\gamma^{-n} \|(Df(0))^{-n} P_+ u\|_2\big)_{n \ge 0}$ sont bornées par c donc $|u|$ est bien définie.

▷ On a $|u| \ge 0$ et $|u| = 0 \Longrightarrow |P_- u|_- = |P_+ u|_+ = 0$ car $|P_\varepsilon u|_\varepsilon \ge 0$. De plus, en prenant $n = 0$, on obtient $|P_\varepsilon u|_\varepsilon \ge \|P_\varepsilon u\|_2$ donc $\|P_\varepsilon u\|_2 = 0$ donc $P_- u = P_+ u = 0$ et donc $u = 0$.

▷ $|\lambda x|_- = \underset{n \ge 0}{\mathrm{Sup}}\big(|\lambda|\, \gamma^{-n} \|(Df(0))^n x\|_2\big) = |\lambda|\, \underset{n \ge 0}{\mathrm{Sup}}\big(\gamma^{-n} \|(Df(0))^n x\|_2\big) = |\lambda|\, |x|_-$ et de même pour $|\ |_+$ et donc $|\lambda u| = \mathrm{Max}\big(|\lambda|\, |P_- u|_-, |\lambda|\, |P_+ u|_+\big) = |\lambda|\, |u|$.

▷ $$\begin{aligned}|x + x'|_- &= \underset{n \ge 0}{\mathrm{Sup}}\big(\gamma^{-n} \|(Df(0))^n x + (Df(0))^n x'\|_2\big) \le \underset{n \ge 0}{\mathrm{Sup}}\big(\gamma^{-n} \|(Df(0))^n x\|_2 + \gamma^{-n} \|(Df(0))^n x'\|_2\big) \\ &\le \underset{n \ge 0}{\mathrm{Sup}}\big(\gamma^{-n} \|(Df(0))^n x\|_2\big) + \underset{n \ge 0}{\mathrm{Sup}}\big(\gamma^{-n} \|(Df(0))^n x'\|_2\big) = |x|_- + |x'|_- \text{ et de même pour } |\ |_+.\end{aligned}$$

Et donc $|u+v| = \mathrm{Max}\big(|P_-u+P_-v|_-, |P_+u+P_+v|_+\big) \le \mathrm{Max}\big(|P_-u|_- + |P_-v|_-, |P_+u|_- + |P_+v|_+\big) \le |u|+|v|$.
Donc $| \ |$ est une norme sur $\mathbf{R}^d$.

$\diamond$ Pour $x \in E_-$, $\forall p \ge 0, (Df(0))^p x \in E_-$ et on a

$$|(Df(0))^p x|_- = \operatorname*{Sup}_{n\ge 0}\big(\gamma^{-n}\|(Df(0))^{n+p}x\|_2\big) = \gamma^p \operatorname*{Sup}_{n\ge 0}\big(\gamma^{-n-p}\|(Df(0))^{n+p}x\|_2\big) = \gamma^p \operatorname*{Sup}_{n\ge p}\big(\gamma^{-n}\|(Df(0))^{n}x\|_2\big) \le \gamma^p |x|_-$$

et de même pour $| \ |_+$ donc

$$\forall p \ge 0, \quad \big(\forall x \in E_-,\ |(Df(0))^p x|_- \le \gamma^p |x|_- \ \text{ et } \ \forall y \in E_+,\ |(Df(0))^{-p} y|_+ \le c\gamma^p |y|_+\big)\ .$$

II.2. La démonstration faite au **I.1.** en utilisant la formule de Taylor-Young **[HP 1]** conduit au résultat (toutes les normes sur $\mathbf{R}^d$ sont équivalentes donc, pour $i = 1, \ldots, d$, $|u_i| \le \operatorname*{Max}_{k=1,\ldots,d} |u_k| = \|u\|_\infty \le K|u|$ c'est à dire $|u_i| = O(|u|)$).

II.3. $f(x,y) = \Big(P_-Df(0)u + P_-\mathcal{N}u, P_+Df(0)u + P_+\mathcal{N}u\Big) = \Big(B_-x + B_-y + G_-(x,y), B_+x + B_+y + G_+(x,y)\Big)$ or E_- et E_+ sont stables par $Df(0)$ donc $Df(0)x \in E_-$ donc $B_+x = P_+Df(0)x = 0$ et, de même, $B_-y = 0$ donc $f(x,y) = \Big(B_-x + G_-(x,y), B_+y + G_+(x,y)\Big)$.

II.4. E_+ étant stable par $Df(0)$, $\forall y \in E_+,\ B_+y = Df(0)y$ et donc $\mathrm{Sp}\left(B_+\big|_{E_+}\right) \subset \mathrm{Sp}(Df(0))$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}\left(B_+\big|_{E_+}\right)$ et donc $B_+\big|_{E_+}$ définit un isomorphisme de E_+ .

II.5. $G_\varepsilon = P_\varepsilon \circ \mathcal{N}$ est C^2 comme composée de fonctions C^2 et $DG_\varepsilon(0,0) = DP_\varepsilon(0,0) \circ D\mathcal{N}(0,0) = P_\varepsilon \circ 0 = 0$ donc la démonstration faite en **I.5.** peut être recopiée ici.
Donc $\forall \alpha \in]0, 1-\gamma[,\quad \exists R_1 > 0,\ \forall \varepsilon = + \text{ ou } -,\ \forall (u,u'),\ |u| \le R_1 \text{ et } |u'| \le R_1 \Longrightarrow |G_\varepsilon(u) - G_\varepsilon(u')| \le \alpha|u-u'|$.

II.6. $\diamond$ Par continuité de G_-, G_+, B_-, B_+^{-1} avec $G_-(0,0) = G_+(0,0) = (0,0)$, on a $(\lambda,\mu) \in c^0 \Rightarrow \chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big) \in c^0$.
De plus, $|x|_- = |x| \le R$ et, pour $n \ge 1$,

$$\begin{aligned}\big|B_-\lambda(n-1) + G_-\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)\big|_- &\le |B_-\lambda(n-1)|_- + \big|G_-\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)\big|_- \\ &\le |Df(0)\lambda(n-1)|_- + \alpha\big|\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)\big|_- \\ &\le \gamma\,|\lambda(n-1)|_- + \alpha R \le (\gamma+\alpha)R \le R\end{aligned}$$

et, pour $n \ge 0$,

$$\begin{aligned}\Big|B_+^{-1}\Big[\mu(n+1) - G_+\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\Big]\Big|_+ &= \Big|Df(0)\Big[\mu(n+1) - G_+\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\Big]\Big|_+ \le \gamma\,\big|\mu(n+1) - G_+\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\big|_+ \\ &\le \gamma\,|\mu(n+1)|_+ + \gamma\,\big|G_+\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\big|_+ \le \gamma\Big[R + \alpha\big|(\lambda(n),\mu(n))\big|\Big] \\ &\le \gamma(1+\alpha)R \le (\gamma+\alpha)R \le R\end{aligned}$$

donc $(\lambda,\mu) \in c^0(R) \Longrightarrow \chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big) \in c^0(R)$.

$\diamond$ On a :

$$\Big|\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)(n) - \chi_R\big(x,(\lambda',\mu')\big)(n)\Big| = \big|(a(n),b(n))\big| = \mathrm{Max}\big(|a(n)|_-, |b(n)|_+\big)$$

avec, pour $n \ge 1$, $a(n) = B_-\big(\lambda(n-1) - \lambda'(n-1)\big) + G_-\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big) - G_-\big(\lambda'(n-1),\mu'(n-1)\big)$, $a(0) = 0$ et $b_n = B_+^{-1}\Big[\mu(n+1) - \mu'(n+1) - G_+\big(\lambda(n),\mu(n)\big) + G_+\big(\lambda'(n),\mu'(n)\big)\Big]$. Et on a, pour $n \ge 1$,

$$\begin{aligned}|a(n)|_- &\le \gamma\big|\lambda(n-1) - \lambda'(n-1)\big|_- + \alpha\big|\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big) - \big(\lambda'(n-1),\mu'(n-1)\big)\big| \\ &\le (\gamma+\alpha)\,\big\|(\lambda,\mu) - (\lambda',\mu')\big\|_\infty\end{aligned}$$

et, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}|b(n)|_+ &\leq \gamma\left[|\mu(n+1)-\mu'(n+1)|_+ + \left|G_+\big(\lambda(n),\mu(n)\big)-G_+\big(\lambda'(n),\mu'(n)\big)\right|\right]\\ &\leq \gamma\left[|\mu(n+1)-\mu'(n+1)| + \alpha\left|\big(\lambda(n),\mu(n)\big)-\big(\lambda'(n),\mu'(n)\big)\right|\right]\\ &\leq \gamma(1+\alpha)\big\|(\lambda,\mu)-(\lambda',\mu')\big\|_\infty \leq (\gamma+\alpha)\big\|(\lambda,\mu)-(\lambda',\mu')\big\|_\infty\end{aligned}$$

donc $\left\|\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)-\chi_R\big(x,(\lambda',\mu')\big)\right\|_\infty \leq (\gamma+\alpha)\big\|(\lambda,\mu)-(\lambda',\mu')\big\|_\infty$.

$\diamond$ $\chi_R\big(x,.\big)$ vérifie donc les hypothèses du théorème du point fixe (la complétude de c^0 étant acquise par la démonstration faite au **I.8.**) et donc $\exists\,!(\lambda,\mu)\in c^0(R),\ \chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)=(\lambda,\mu)$.

$\diamond$ Notons (λ_x^R,μ_x^R) ce point fixe. La démonstration faite au **I.8.b.** s'applique sans changement pour montrer que (λ_x^R,μ_x^R) est, en fait, indépendant de $R\in\big[|x|_-,R_1\big]$. On conclut donc

$$\underline{\forall x\in E_-\cap B(0,R_1),\ \exists\,!(\lambda_x,\mu_x)\in c^0(R_1) \text{ tel que } \forall R\in\big[|x|,R_1\big],\ (\lambda_x,\mu_x)\in c^0(R) \text{ et } \chi_R\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big)=(\lambda_x,\mu_x)}\ .$$

II.7. $\diamond$ De plus, comme au **I.6.c.**, $\left\|\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)-\chi_R\big(x',(\lambda,\mu)\big)\right\|_\infty = |x-x'|$ et, comme au **I.9.a.**, on en déduit grâce à **I.7.** que $\underline{x\longmapsto(\lambda_x,\mu_x)\text{ est lipschitzienne sur }E_-\cap B(0,R_1)}$.

$\diamond$ Toujours comme au **I.9.a.** $\underline{\psi_-\text{ est lipschitzienne sur }E_-\cap B(0,R_1)}$ et on a, pour $x\in E_-\cap B(0,R_1)$, $\psi_-(x)=\mu_x(0)\in E_+$ et $|\psi_-(x)| = |\psi_-(x)|_+ = |\mu_x(0)|_+ \leq \big|(\lambda_x(0),\mu_x(0))\big| \leq \big\|(\lambda_x,\mu_x)-(\lambda_{x'},\mu_{x'})\big\|_\infty| \leq R_1$ donc $\underline{\psi_-\big(E_-\cap B(0,R_1)\big)\subset E_+\cap B(0,R_1)}$.

II.8. $\diamond$ Soit $(x,y)\in\mathcal{M}_s(R)$, $f^n(x,y)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\forall n,\ |f^n(x,y)|\leq R$ donc la suite $\big(f^n(x,y)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $c^0(R)$. Si $f^n(x,y)=(\lambda(n),\mu(n))$, on a $(\lambda(0),\mu(0))=(x,y)$ et, pour $n\geq 1$,

$$(\lambda(n),\mu(n)) = \Big(B_-\lambda(n-1)+G_-\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big),B_+\mu(n-1)+G_+\big(\lambda(n-1),\mu(n-1)\big)\Big)$$

donc $\mu(n)=B_+^{-1}\Big[\mu(n+1)-G_+\big(\lambda(n),\mu(n)\big)\Big]$. Donc $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)=(\lambda,\mu)$ et, pour $n\geq 1$, $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)(n)=(\lambda(n),\mu(n))$ donc $\chi_R\big(x,(\lambda,\mu)\big)=(\lambda,\mu)$ et donc, par unicité du point fixe, $\big(f^n(x,y)\big)_{n\in\mathbf{N}}=(\lambda_x,\mu_x)$. En particulier, $y=\mu_x(0)$ et on a $|x|\leq R$ donc $\mathcal{M}_s(R)\subset\big\{(x,\psi_-(x))\mid |x|\leq R\big\}$.

$\diamond$ Réciproquement, soit $x_inE_-\cap B(0,R_1)$, montrons par récurrence sur n que $(\lambda_x(n),\mu_x(n))=f^n(x,\psi_-(x))$. Pour $n=0$, on a $(\lambda_x(0),\mu_x(0)) = \chi_R\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big)(0) = (x,B_+^{-1}[\mu(1)-G_+(\lambda(0),\mu(0))])$ donc $\lambda_x(0)=x$ ($\mu_x(0)=\psi_-(x)$ est donné). Si ceci est vrai pour $n-1$,

$$\begin{aligned}f^n(x,\psi_-(x)) &= f(\lambda_x(n-1),\mu_x(n-1))\\ &= (B_-\lambda_x(n-1)+G_-(\lambda_x(n-1),\mu_x(n-1)),B_+\mu_x(n-1)+G_+(\lambda_x(n-1),\mu_x(n-1)))\,.\end{aligned}$$

Or la definition de (λ_x,μ_x) donne $\forall n\geq 1,\ \mu_x(n-1)=B_+^{-1}[\mu(n)-G_+(\lambda(n-1),\mu(n-1))])$ et $\lambda_x(n)=\frac{1}{2}\lambda(n-1)+g(\lambda(n-1),\mu(n-1))$ ce qui donne bien $f^n(x,\psi_-(x))=(\lambda_x(n),\mu_x(n))$.
Or $(\lambda_x,\mu_x)\in c^0(R)$ donc $f^n(x,\psi_-(x))\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\forall n,\ |f^n(x,\psi_-(x))|\leq R$ et donc $(x,\psi_-(x))\in\mathcal{M}_s(R)$. Donc $\big\{(x,\psi_-(x))\mid |x|\leq R\big\}\subset\mathcal{M}_s(R)$.
Finalement, $\underline{\mathcal{M}_s(R)=\big\{(x,\psi_-(x))\mid |x|\leq R\big\}}$.

Partie III

III.1. $\diamond$ Montrons que $\forall\varepsilon=+$ ou $-$, $\underline{\forall(x,y)\in B(0,R_1),\ \forall(h^1,h^2)\in E_-\times E_+,\ |DG_\varepsilon(x,y)(h^1,h^2)|_\varepsilon\leq\alpha|(h^1,h^2)|}$.

Si $(x,y) \in B_o(0,R_1)$, $\exists\,\varepsilon>0$, $\forall t \in]0,\varepsilon]$, $(x,y)+t(h^1,h^2) \in B(0,R_1)$ et **II.5.** donne $|G_\varepsilon(x+th^1,y+th^2) - G_\varepsilon(x,y)| \le \alpha|t||(h^1,h^2)|$ donc $\left|\frac{1}{t}\left(G_\varepsilon(x+th^1,y+th^2)-G_\varepsilon(x,y)\right)\right| \le \alpha|(h^1,h^2)|$ et, en passant à la limite pour $t \underset{t\neq 0}{\longrightarrow} 0$, $|DG_\varepsilon(x,y)| \le \alpha|(h^1,h^2)|$. Le résultat souhaité est vrai sur la boule ouverte $B_o(0,R_1)$ donc, par continuité de $(x,y)\mapsto DG_\varepsilon(x,y)$, sur la boule fermée $B(0,R_1)$.

$\diamond$ Le fait que $\forall x \in E_- \cap B(0,R_1)$, $\forall(\lambda,\mu)\in c^0(R_1)$, $\quad D_2\chi\big(x,(\lambda,\mu)\big) \in \mathcal{L}(c^0)$ est clair.

Puisque $\forall k$, $(\lambda(k),\mu(k)) \in B(0,R_1)$, en appliquant ceci et **II.1.d**, on a, pour tout $\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\in c^0$, tout d'abord, pour $n\ge 1$,

$$\begin{aligned}|X_1(n)|_- &\le \gamma\left|\varepsilon^1(n-1)\right|_- + \alpha\left|\left(\varepsilon^1(n-1),\varepsilon^2(n-1)\right)\right| \\ &\le (\gamma+\alpha)\left|\left(\varepsilon^1(n-1),\varepsilon^2(n-1)\right)\right| \le (\gamma+\alpha)\left\|\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\right\|_\infty\end{aligned}$$

puis, pour $n\ge 0$,

$$\begin{aligned}|X_2(n)|_+ &\le \gamma\left[|\varepsilon^2(n+1)|_+ + \left|DG_+(\lambda(n),\mu(n))\left(\varepsilon^1(n),\varepsilon^2(n)\right)\right|\right] \\ &\le \gamma\left[|\varepsilon^2(n+1)|_+ + \alpha\left|\left(\varepsilon^1(n),\varepsilon^2(n)\right)\right|\right] \\ &\le \gamma(1+\alpha)\left\|\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\right\|_\infty \le (\gamma+\alpha)\left\|\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\right\|_\infty\end{aligned}$$

donc $\forall n\ge 0$, $\left|\left(X_1(n),X_2(n)\right)\right| \le (\gamma+\alpha)\left\|\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\right\|_\infty$ donc $\left\|\left(X_1(n),X_2(n)\right)\right\|_\infty \le (\gamma+\alpha)\left\|\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\right\|_\infty$ et donc $D_2\chi\big(x,(\lambda,\mu)\big)\in\mathcal{L}(c^0)$ et

$$\underline{\forall x \in E_- \cap B(0,R_1),\ \forall(\lambda,\mu)\in c^0(R_1),\quad |||D_2\chi\big(x,(\lambda,\mu)\big)|||_\infty \le \gamma+\alpha<1}\ .$$

III.2. On a vu que c^0 est complet pour $\|\ \|_\infty$, on sait qu'alors (**[HP 4]**) $\mathcal{L}_c(c^0)$ est complet pour la norme subordonnée. Or dans une algébre normée complète d'unité e, comme $\mathcal{L}_c(c^0)$, on sait que $\|u\|<1 \Rightarrow e-u$ inversible d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$. Donc, ici, $\underline{\forall x \in E_- \cap B(0,R_1),\ \forall(\lambda,\mu)\in c^0(R_1),\quad \mathrm{Id}-D_2\chi\big(x,(\lambda,\mu)\big)\text{ est inversible}}$.

III.3. $\diamond$ On a évidemment $\|D_1\chi\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big)(h)\|_\infty = |(h,0)| = |h|_- = |h|$ donc $D_1\chi\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big)$ est une application linéaire continue de E_- dans c^0. Le résultat utilisé ci-dessus donne aussi que $\left[\mathrm{Id}-D_2\chi\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big)\right]^{-1}\in\mathcal{L}_c(c^0)$ donc, en tant que composé, $\underline{\forall x \in E_- \cap B(0,R_1),\ A(x)\in\mathcal{L}_c(E_-,c^0)}$.

$\diamond$ On a déjà $x\longmapsto D_1\chi\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big)$ est continue sur $E_-\cap B(0,R_1)$ car constante.

D'autre part, soit $(x,x')\in(E_-\cap B(0,R_1))^2$ et $\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\in c^0$.

Posons $\left(D_2\chi\big(x,(\lambda_x,\mu_x)\big) - D_2\chi\big(x',(\lambda_{x'},\mu_{x'})\big)\right)\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)(n) = \big(Y_1(n),Y_2(n)\big)$. On a :

$$\begin{aligned}\forall n\ge 1,\ |Y_1(n)|_- &= \left|\Big(DG_-(\lambda_x(n),\mu_x(n)) - DG_-(\lambda_{x'}(n),\mu_{x'}(n))\Big)\left(\varepsilon^1(n-1),\varepsilon^2(n-1)\right)\right|_- \\ &\le \left|\left|\left|DG_-(\lambda_x(n),\mu_x(n)) - DG_-(\lambda_{x'}(n),\mu_{x'}(n))\right|\right|\right|\left|\left(\varepsilon^1(n-1),\varepsilon^2(n-1)\right)\right| \\ &\le \left|\left|\left|DG_-(\lambda_x(n),\mu_x(n)) - DG_-(\lambda_{x'}(n),\mu_{x'}(n))\right|\right|\right|\left\|\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\right\|_\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall n\ge 0,\ |Y_2(n)|_+ &= \left|B_+^{-1}\Big(DG_+(\lambda_x(n),\mu_x(n)) - DG_+(\lambda_{x'}(n),\mu_{x'}(n))\Big)\left(\varepsilon^1(n),\varepsilon^2(n)\right)\right|_+ \\ &\le \gamma\left|\Big(DG_+(\lambda_x(n),\mu_x(n)) - DG_+(\lambda_{x'}(n),\mu_{x'}(n))\Big)\left(\varepsilon^1(n),\varepsilon^2(n)\right)\right|_+ \\ &\le \gamma\left|\left|\left|DG_+(\lambda_x(n),\mu_x(n)) - DG_+(\lambda_{x'}(n),\mu_{x'}(n))\right|\right|\right|\left\|\left(\varepsilon^1,\varepsilon^2\right)\right\|_\infty\end{aligned}$$

D'autre part, $(x,y)\mapsto DG_\varepsilon(x,y)$ est C^1 sur $E_-\times E_+$ car G_ε est C^2. Notons $D\big(DG_\varepsilon\big)(x,y)$ la différentielle de cette application ($D\big(DG_\varepsilon\big)(x,y)\in\mathcal{L}\big(E_-\times E_+,\mathcal{L}(E_-\times E_+,E_\varepsilon)\big)$). $D\big(DG_\varepsilon\big)$ est bornée sur $B(0,R_1)$ car continue sur ce compact et, avec $M_\varepsilon = \underset{(x,y)\in B(0,R_1)}{\mathrm{Max}}\left(\underset{(h^1,h^2)\neq 0}{\mathrm{Sup}}\ \dfrac{|||D\big(DG_\varepsilon\big)(x,y)(h^1,h^2)|||}{|(h^1,h^2)|}\right)$ et $M=\mathrm{Max}\big(M_+,M_-\big)$ et en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $B(0,R_1)$, on obtient

$$\forall(x,y)\in B(0,R_1),\ \forall(x',y')\in B(0,R_1),\ \left|\left|\left|DG_\varepsilon(x,y)-DG_\varepsilon(x',y')\right|\right|\right| \le M\left|(x,y)-(x',y')\right|\ .$$

Donc, puisque $\forall n,\ (\lambda_x(n), \mu_x(n)) \in B(0, R_1)$, les inégalités précèdentes deviennent :

$$|Y_1(n)|_- \leq M\big|(\lambda_x(n), \mu_x(n)(\lambda_{x'}(n), \mu_{x'}(n)\big|\big\|\big(\varepsilon^1, \varepsilon^2\big)\big\|_\infty$$
$$|Y_2(n)|_+ \leq \gamma M\big|(\lambda_x(n), \mu_x(n)) - (\lambda_{x'}(n), \mu_{x'}(n))\big|\big\|\big(\varepsilon^1, \varepsilon^2\big)\big\|_\infty$$

donc $\forall n \geq 0,\ |Y_1(n)|_- \leq M\big\|(\lambda_x, \mu_x) - (\lambda_{x'}, \mu_{x'})\big\|_\infty\big\|\big(\varepsilon^1, \varepsilon^2\big)\big\|_\infty$ et de même pour $|Y_2(n)|_+$.
Ensuite, on a vu au **II.7.** que $x \mapsto (\lambda_x, \mu_x)$ est lipschitzienne. En notant k une constante de Lipschitz, on a

$$|Y_1(n)|_- \leq Mk\big|x - x'\big|\big\|\big(\varepsilon^1, \varepsilon^2\big)\big\|_\infty \quad \text{et} \quad |Y_2(n)|_+ \leq \gamma Mk\big|x - x'\big|\big\|\big(\varepsilon^1, \varepsilon^2\big)\big\|_\infty .$$

Donc, finalement, $\big\|(Y_1, Y_2)\big\|_\infty \leq Mk\big|x - x'\big|\big\|\big(\varepsilon^1, \varepsilon^2\big)\big\|_\infty$ ce qui donne

$$\Big|\Big|\Big|D_2\chi\big(x, (\lambda_x, \mu_x)\big) - D_2\chi\big(x', (\lambda_{x'}, \mu_{x'})\big)\Big|\Big|\Big|_\infty \leq Mk\big|x - x'\big|$$

donc $x \longmapsto D_2\chi\big(x, (\lambda_x, \mu_x)\big)$ est lipschitzienne donc continue .

Enfin, l'application $\begin{array}{rcl} B_o(0,1) \subset \mathcal{L}_c(c^0) & \to & \mathcal{L}_c(c^0) \\ u & \mapsto & \big(\mathrm{Id} - u\big)^{-1} \end{array}$ est continue car $\big(\mathrm{Id} - u\big)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$ et que cette série de fonctions continues de u converge normalement sur tout compact de $B_o(0,1)$. Donc, par composée $x \longmapsto \big[\mathrm{Id} - D_2\chi\big(x, (\lambda_x, \mu_x)\big)\big]^{-1}$ est continue et, par produit, $\underline{A \text{ est continue sur } E_- \cap B(0, R_1)}$.

III.4. $\diamond$ Commençons par un résultat préliminaire: si φ est C^2 sur $E_- \times E_+$ à valeurs dans E_ε alors il existe C telle que $\forall (x, y) \in B(0, R_1),\ \forall (x + h^1, y + h^2) \in B(0, R_1),\ \big|\varphi(x + h^1, y + h^2) - \varphi(x, y) - D\varphi(x, y)(h^1, h^2)\big|_\varepsilon \leq C|(h^1, h^2)|^2$.

Notons $a = (x, y)$, $h = (h^1, h^2) = (h_1, \ldots, h_d)$, et $\theta(t) = \varphi(a + th)$. θ est C^2 sur $[0, 1]$ et $\theta'(t) = D\varphi(a + th)(h) = \sum\limits_{i=1}^{d} h_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}(a + th)$, $\theta''(t) = \sum\limits_{i=1}^{d}\sum\limits_{j=1}^{d} h_i h_j \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(a + th)$. Or, par continuité sur un compact les dérivées partielles $dd\varphi x_i x_j$ sont bornées sur $B(0, R_1)$. En particulier, $\exists\, K,\ \forall t \in [0, 1],\ \forall (i, j),\ \left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(a + th)\right|_\varepsilon \leq K$ et alors $\forall t \in [0, 1],\ |\theta''(t)|_\varepsilon \leq K \sum\limits_{i=1}^{d}\sum\limits_{j=1}^{d} |h_i||h_j| \leq K\left(\underset{1\leq i\leq d}{\mathrm{Max}} |h_i|\right)^2 \leq K\left(K'|h|\right)^2$ car les normes $\underset{1\leq i\leq d}{\mathrm{Max}} |h_i|$ et $|\ |$ sont équivalentes. Donc l'inégalité de Taylor-Lagrange donne le résultat souhaité.
$\diamond$ On a

$$\big\|\big(\lambda_{x+h}, \mu_{x+h}\big) - \big(\lambda_x, \mu_x\big) - A(x)(h)\big\|_\infty \leq \big|\big|\big|\big[\mathrm{Id} - D_2\chi(x, (\lambda_x, \mu_x))\big]^{-1}\big|\big|\big|_\infty \times$$
$$\Big\|\big[\mathrm{Id} - D_2\chi(x, (\lambda_x, \mu_x))\big]\Big[\big(\lambda_{x+h}, \mu_{x+h}\big) - \big(\lambda_x, \mu_x\big)\Big] - D_1\chi(x, (\lambda_x, \mu_x))(h)\Big\|_\infty .$$

Or $\big|\big|\big|\big[\mathrm{Id} - D_2\chi(x, (\lambda_x, \mu_x))\big]^{-1}\big|\big|\big|_\infty \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big|\big|\big|D_2\chi(x, (\lambda_x, \mu_x))\big|\big|\big|_\infty^n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\gamma + \alpha)^n = \dfrac{1}{1 - \gamma + \alpha}$.
Posons $\big[\mathrm{Id} - D_2\chi(x, (\lambda_x, \mu_x))\big]\Big[\big(\lambda_{x+h}, \mu_{x+h}\big) - \big(\lambda_x, \mu_x\big)\Big] - D_1\chi(x, (\lambda_x, \mu_x))(h) = (Z_1, Z_2)$. On a

$$Z_1(0) = \lambda_{x+h}(0) - 0 - \lambda_x(0) + 0 - h = x + h - x - h = 0$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} Z_1(n) = \lambda_{x+h}(n) - B_-\lambda_{x+h}(n-1) - DG_-(\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1))(\lambda_{x+h}(n-1), \mu_{x+h}(n-1)) \\ - \lambda_x(n) + B_-\lambda_x(n-1) + DG_-(\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1))(\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1)) \end{aligned}$$

donc, en tenant compte de $\lambda_y(n) = B_-\lambda_y(n-1) + G_-(\lambda_y(n-1), \mu_y(n-1))$, on a

$$\begin{aligned} |Z_1(n)|_- = \Big|&G_-(\lambda_{x+h}(n-1), \mu_{x+h}(n-1)) - G_-(\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1)) \\ &- DG_-(\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1))\Big[(\lambda_{x+h}(n-1), \mu_{x+h}(n-1)) - (\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1))\Big]\Big|_- \\ \leq K_-&\Big|(\lambda_{x+h}(n-1), \mu_{x+h}(n-1)) - (\lambda_x(n-1), \mu_x(n-1))\Big|^2 \end{aligned}$$

d'aprés le résultat vu plus haut.
De même, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}Z_2(n) &= \mu_{x+h}(n) - B_+^{-1}\Big[\mu_{x+h}(n+1) - DG_+(\lambda_x(n),\mu_x(n))(\lambda_{x+h}(n),\mu_{x+h}(n))\Big] \\ &\qquad - \mu_x(n) + B_+^{-1}\Big[\mu_x(n+1) - DG_+(\lambda_x(n),\mu_x(n))(\lambda_x(n),\mu_x(n))\Big] \\ &= -B_+^{-1}\Big[G_+(\lambda_{x+h}(n),\mu_{x+h}(n)) - G_+(\lambda_x(n),\mu_x(n)) \\ &\qquad - DG_+(\lambda_x(n),\mu_x(n))\Big[(\lambda_{x+h}(n),\mu_{x+h}(n)) - (\lambda_x(n),\mu_x(n))\Big]\Big]\end{aligned}$$

car $\mu_y(n) = B_+^{-1}\Big[\mu_{x+h}(n+1) - G_+(\lambda_x(n),\mu_x(n))\Big]$ et donc

$$|Z_2(n)|_+ \leq |||B_+^{-1}|||_+ K_+ \Big|(\lambda_{x+h}(n),\mu_{x+h}(n)) - (\lambda_x(n),\mu_x(n))\Big|^2 .$$

Mais $\big|(\lambda_{x+h}(p),\mu_{x+h}(p)) - (\lambda_x(p),\mu_x(p))\big| \leq \big\|(\lambda_{x+h},\mu_{x+h}) - (\lambda_x,\mu_x)\big\|_\infty \leq k|h|$.
Donc $\big\|(Z_1,Z_2)\big\|_\infty \leq \mathrm{Max}(K_-, |||B_+^{-1}|||_+ K_+)k^2|h|^2$ et donc

$$\underline{\exists C,\quad \forall (x,h) \in E_-^2 \text{ tel que } |x| < R_1 \text{ et } |x+h| < R_1,\ \big\|(\lambda_{x+h},\mu_{x+h}) - (\lambda_x,\mu_x) - A(x)(h)\big\|_\infty \leq C|h|^2} .$$

III.5. En particulier, en regardant le terme d'indice 0 et sa deuxiéme composante, on a

$$\forall (x,h) \in E_-^2 \text{ tel que } |x| < R_1 \text{ et } |x+h| < R_1,\ \big|\psi_-(x+h) - \psi_-(x) - P_+A(x)(h)\big|_+ \leq C|h|^2$$

soit $\psi_-(x+h) = \psi_-(x) + P_+A(x)(h) + O\big(|h|^2\big)$. Comme $P_+A(x)$ est linéaire, ψ_- est différentiable sur $E_- \cap B(0,R_1)$ de différentielle $D\psi_-(x) = P_+A(x)$ et, comme $x \longmapsto P_+A(x)$ est continue sur $E_- \cap B(0,R_1)$, on en conclut que $\underline{\psi_- \text{ est } C^1 \text{ sur } E_- \cap B(0,R_1)}$.

III.6. On a directement $(0,0) \in \mathcal{M}_s(R)$ donc, en utilisant **II.8.**, $\psi_-(0) = 0$ c'est à dire $(\lambda_0,\mu_0) = \big(f^n(0,0)\big)_{n\in\mathbf{N}} = \big((0,0)\big)_{n\in\mathbf{N}}$.
Or $DG_\varepsilon(0,0) = 0 \in \mathcal{L}\big(E_- \times E_+, E_\varepsilon\big)$. Donc $\big[\mathrm{Id} - D_2\chi(0,(\lambda_0,\mu_0))\big](\varepsilon^1,\varepsilon^2) = (W_1,W_2)$ avec $\underline{W_1(0) = \varepsilon^1(0)}$ et, $\underline{\text{si } n \geq 1,\ W_1(n) = \varepsilon^1(n) - B_-\varepsilon^1(n-1)}$ et, $\underline{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ W_2(n) = \varepsilon^2(n) - B_+^{-1}\varepsilon^2(n+1)}$.

III.7. ◇ Avec les notations de **III.6.**, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} B_-^{n-k}W_1(k) = B_-^n\varepsilon^1(0) + \sum\limits_{k=1}^{n} B_-^{n-k}\varepsilon^1(k) - B_-^{n-k+1}\varepsilon^1(k-1) = \varepsilon^1(n)$.
◇ $\sum\limits_{k=n}^{n+p} B_+^{n-k}W_2(k) = \sum\limits_{k=n}^{n+p} B_+^{n-k}\varepsilon^2(k) - B_+^{n-k-1}\varepsilon^2(k+1) = \varepsilon^2(n) - B_+^{-p-1}\varepsilon^2(n+p+1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \varepsilon^2(n)$ donc la série $\big(\sum B_+^{n-k}W_2(k)\big)$ converge et $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} B_+^{n-k}W_2(k) = \varepsilon^2(n)$.

$$\underline{T(W_1,W_2)(n) = \Big(\sum_{k=0}^{n} B_-^{n-k}W_1(k), \sum_{k=n}^{+\infty} B_+^{n-k}W_2(k)\Big)} .$$

III.8. ◇ On a vu au **5.** que $D\psi_-(0)(h) = P_+A(0)(h)(0)$ et $A(0)(h) = T \circ D_1\chi(0,(\lambda_0,\mu_0))(h)(n) = (B_-^n h, 0)$ donc $\underline{D\psi_-(0) = 0_{\mathcal{L}(E_-,E_+)}}$.
◇ $\mathcal{M}_s(R_1)$ est donc une sous-variété de $\mathbf{R}^d$ de classe C^1 qui a pour espace tangent en $(0,0)$ E_-.

* * *
* *
*

Résultats hors-programme utilisés

[HP 1] Au programme, la formule de Taylor-Young ne figure que pour 2 variables et pour des fonctions à valeurs réelles. Il est facile de passer aux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ en écrivant la formule pour chaque composante. La démonstration dans le cas d'une application de d variables est similaire à celle pour 2 variables.

[HP 2] Le théorème d'inversion locale n'est pas cité par le programme. Seuls apparaissent d'une part un théorème d'inversion avec l'hypothèse d'injectivité pour f C^1 (le cas C^p n'est pas cité), d'autre part une allusion au théorème des fonctions implicites pour traiter la géomètrie. On peut déduire le théorème d'inversion locale du théorème du programme:

Plaçons dans les hypothèses de l'énoncé (la démonstration générale est identique).

$\diamond$ Supposons $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f\big|_{B_o(0,\frac{1}{n})}$ non injective. Alors $\exists\,(a_n, b_n) \in \big(B_o(0,\frac{1}{n})\big)^2,\ a_n \neq b_n$ et $f(a_n) = f(b_n)$. On a donc $0 = f(a_n) - f(b_n) = Df(b_n)(a_n - b_n) + |a_n - b_n|\varepsilon(a_n - b_n)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$ donc $Df(b_n)\left(\dfrac{a_n - b_n}{|a_n - b_n|}\right) = -\varepsilon(a_n - b_n)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = \left(\dfrac{a_n - b_n}{|a_n - b_n|}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant bornée admet une sous-suite convergente $(u_{\varphi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$: $u_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \ell$ avec $|\ell| = 1$. Comme $(a_{\varphi(p)}, b_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} (0,0)$, on obtient, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, $Df(0)(\ell) = 0$ donc, puisque $Df(0)$ est inversible, $\ell = 0$ ce qui est contradictoire. Donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $f\big|_{B_o(0,\frac{1}{n_0})}$ injective.

$\diamond$ D'autre part, $\big|\det\big(Df(x)\big)\big| \xrightarrow[x\to 0]{} \big|\det\big(Df(0)\big)\big| > 0$ (le déterminant est continue sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^d)$ car il s'exprime comme comme combinaison linéaire de produits de formes linéaires sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^d)$) donc il existe U ouvert, $U \in \mathcal{V}(0)$ tel que $\forall x \in U,\ \det\big(Df(x)\big) \neq 0$. Soit $U' = U \cap B_o(0, \frac{1}{n_0})$: c'est un ouvert sur lequel f vérifie les hypothèses du théorème du programme. D'après ce théorème, $g = f\big|_{U'}$ est un C^1 difféomorphisme de U' sur l'ouvert $f(U')$.

$\diamond$ Il reste à montrer que g^{-1} est C^2. On a $D(g^{-1})(y) = \big[Df\big(g^{-1}(y)\big)\big]^{-1}$. $Df(x)$ est C^1 sur U' et g^{-1} est C^1 donc $y \mapsto Df\big(g^{-1}(y)$ est C^1 à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$, or $u \mapsto u^{-1}$ est C^∞ sur $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$ (il suffit d'écrire la matrice de u^{-1} dans une base en fonction de celle de u dans la même base) donc $D(g^{-1})$ est C^1 donc g^{-1} est C^2.

[HP 3] Le théorème du point fixe n'apparait que dans "l'annexe MP*" (donc pas dans le programme officiel).

[HP 4] Les complétudes de $\big(\mathcal{B}(A,E), \|\ \|_\infty\big)$ où E est un espace de Banach et A une partie d'un espace vectoriel normé et de $\big(\mathcal{L}(E), |||\ |||\big)$ si E est un espace de Banach apparaissent dans"l'annexe MP*".