Préliminaire

On a $0 \leq \int_a^b \big(\lambda f(t)+g(t)\big)^2 dt = \lambda^2 \int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt + 2\lambda \int_a^b f(t).g(t)\,dt + \int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt = A\lambda^2 + B\lambda + C$.
Le polynôme $P = AX^2 + BX + C$ est positif sur $\mathbf{R}$ donc son discriminant est négatif : $B^2 - 4AC \leq 0$ d'où

$$\left|\int_a^b f(t).g(t)\,dt\right| = \sqrt{\frac{B}{4}} \leq \sqrt{AC} = \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt}\sqrt{\int_a^b \big(g(t)\big)^2 dt}$$

I Étude de la fonction f.

1^o) Pour $0 \leq x \leq y \leq 2\pi$ et $0 \leq a \leq b \leq 2\pi$ on a $|x| \leq 2\pi$ et $|b| \leq 2\pi$ d'où
$\big|f(x,y)-f(a,b)\big| = \big|2\pi(x-a) - x(y-b) - b(x-a)\big| \leq 6\pi \max\{|x-a|, |y-b|\} \leq 6\pi\|(x,y)-(a,b)\|$.
On a la même inégalité $\big|f(x,y)-f(a,b)\big| \leq 6\pi\|(x,y)-(a,b)\|$ dans les autres cas.
Ainsi f est 6π-lipschitzienne donc continue.

2^o) Pour $x < x_0$ on a $\dfrac{f(x,x_0)-f(x_0,x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x(2\pi-x_0)-x_0(2\pi-x_0)}{x-x_0} = 2\pi - x_0$ et, pour $x > x_0$,
$\dfrac{f(x,x_0)-f(x_0,x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x_0(2\pi-x)-x_0(2\pi-x_0)}{x-x_0} = -x_0$.
Comme $2\pi - x_0 \neq -x_0$ le taux d'accroissement $\dfrac{f(x,x_0)-f(x_0,x_0)}{x-x_0}$ ne peut avoir de limite en x_0 : f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en (x_0,x_0).

3^o) Les variations de φ sont :

y	0	x	2π
φ'	$+$	0	$-$
φ	0 $\nearrow$	$x(2\pi-x) = m(x)$	$\searrow$ 0

et celles de m

x	0	π	2π
m'	$+$	0	$-$
$m(x)$	0 $\nearrow$	π^2	$\searrow$ 0

Ainsi on a $0 \leq \varphi(y) = f(x,y) \leq \pi^2$ pour tous x et y avec $f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$ ou $y = 2\pi$ et $f(x,y) = \pi^2$ si et seulement si $x = y = \pi$.

II Étude d'un endomorphisme associé à f.

1°) a) E est le noyau de l'application linéaire de $\mathcal{C}^2\big([0;2\pi],\mathbf{R}\big)$ vers $\mathbf{R}^2$ qui à f associe $\big(f(0),f(2\pi)\big)$; c'est donc un sous-espace de $\mathcal{C}^2\big([0;2\pi],\mathbf{R}\big)$.

b) On a $N(\varphi)\geq 0$.

Si $N(\varphi)=0$ alors $\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt=0$ or φ^2 est continue positive donc est nulle ; on en déduit $\varphi=0$.

$N(\lambda\varphi)=\sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi}\lambda^2\varphi^2(t)\,dt}=\sqrt{\lambda^2\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt}=|\lambda|\sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt}=|\lambda|N(\varphi)$.

$$\begin{aligned}N(\varphi+\psi)&=\sqrt{\int_0^{2\pi}\big(\varphi(t)+\psi(t)\big)^2\,dt}=\sqrt{\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt+2\int_0^{2\pi}\varphi(t)\psi(t)\,dt+\int_0^{2\pi}\psi(t)\big)^2\,dt}\\&\leq\sqrt{\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt+2\sqrt{\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt}\sqrt{\int_0^{2\pi}\psi^2(t)\,dt}+\int_0^{2\pi}\psi(t)\big)^2\,dt}\ \ \text{(Cauchy-Schwarz)}\\&\leq\sqrt{\left(\sqrt{\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt}+\sqrt{\int_0^{2\pi}\psi^2(t)\,dt}\right)^2}=\sqrt{\int_0^{2\pi}\varphi^2(t)\,dt}+\sqrt{\int_0^{2\pi}\psi^2(t)\,dt}=N(\varphi)+N(\psi)\end{aligned}$$

2°) On a $\psi(x)=2\pi\displaystyle\int_0^x y\varphi(y)\,dy+2\pi x\int_x^{2\pi}\varphi(y)\,dy-x\int_0^{2\pi}y\varphi(y)\,dy$.

a) L'application $\alpha:\ \varphi\mapsto\psi$ est linéaire.

Comme φ est continue l'expression ci-dessus montre que ψ est dérivable avec $\psi'(x)=2\pi x\varphi(x)+2\pi\displaystyle\int_x^{2\pi}\varphi(y)\,dy-2\pi x\varphi(x)-\int_0^{2\pi}y\varphi(y)\,dy=2\pi\int_x^{2\pi}\varphi(y)\,dy-2\pi x\varphi(x)$ puis ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\psi"(x)=-2\pi\varphi(x)$. Ainsi $\psi\in\mathcal{C}^2\big([0;2\pi],\mathbf{R}\big)$.

De plus $\psi(0)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(y)f(0,y)=0$ et $\psi(2\pi)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(y)f(2\pi,y)=0$ donc $\psi\in E$.

b) Supposons $\alpha(\varphi)=\psi=0$ alors $-2\pi\varphi=\psi"=0$ donc $\varphi=0$. Ainsi $\ker(\alpha)=\{0\}$ donc α est injective.

c) Si $\psi=\alpha(\varphi)$ alors $\psi"=-2\pi\varphi$ donc ψ est de classe $\mathcal{C}^4$. α ne peut donc être surjective car E contient des éléments qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^4$[(1)].

3°) a) On a $\displaystyle\int_0^{2\pi}f^2(x,y)\,dx=\int_0^y x^2(2\pi-y)^2\,dx+y^2\int_y^{2\pi}(2\pi-x)^2\,dx=\frac{2\pi}{3}y^2(2\pi-y)^2$ puis

$C=\dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{2\pi}y^2(2\pi-y)^2\,dy=\frac{16\pi^5}{15}$.

b) On a $\big(\alpha(\varphi)(x)\big)^2=\left(\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(y)f(x,y)\,dy\right)^2\leq\int_0^{2\pi}\varphi^2(y)\,dy.\int_0^{2\pi}f^2(x,y)\,dy=\big(N(\varphi)\big)^2\int_0^{2\pi}f^2(x,y)\,dy$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'où

$N\big(\alpha(\varphi)\big)=\sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi}\big(\alpha(\varphi)(x)\big)^2dx}\leq N(\varphi)\sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}f^2(x,y)\,dy\right)dx}=N(\varphi)\sqrt{C}$

(1) Par exemple $\varphi(x)=0$ pour $x\in[0;\pi]$ et $\varphi(x)=\sin^3(x)$ pour $x\in[\pi;2\pi]$.

III Quelques applications numériques.

1^o) φ_0 est affine par morceaux et continue car $\varphi_0(0) = \varphi_0(2\pi) = 0$; son graphe est "en dents de scie".
La périodicité implique que φ_0 est paire si et seulement si sa restriction à $[-\pi;\pi]$ l'est c'est-à-dire si et seulement si $\forall x \in [0;\pi]$ $\varphi_0(-x) = \varphi_0(x)$.
Or $\varphi_0(-x) = \varphi_0(2\pi - x) = f(2\pi - x, y_0)$ si $x \in [0;\pi]$ car alors $2\pi - x \in [\pi; 2\pi] \subset [0; 2\pi]$.
Si $y_0 \leq \pi$ alors, en appliquant en $x = y_0$, on doit avoir $f(2\pi - y_0, y_0) = y_0\big((2\pi - (2\pi - y_0)\big) = y_0^2 = f(y_0, y_0) = y_0(2\pi - y_0)$ donc $y_0 = 0$ ou $y_0 = \pi$.
De même, si $y_0 \geq \pi$, on a, en appliquant en $x = 2\pi - y_0$, $y_0 = \pi$ ou $y_0 = 2\pi$.
Inversement si $y_0 \in \{0, 2\pi\}$ alors $\varphi_0 = 0$ donc est paire et si $y_0 = \pi$ alors φ_0 est paire (égale à πx sur $[0;\pi]$).
On suppose donc $y_0 = \pi$ dans la suite[(2)].

2^o) Comme φ_0 est paire on a $b_n(\varphi_0) = 0$.

$$a_0(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi t\,dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$a_n(\varphi_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi t\cos(nt)\,dt = 2\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n}dt$$
$$= -2\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{n^2}\big(-(-1)^n + 1\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-4}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

φ_0 est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc sa série de Fourier converge (uniformément)[(3)] vers φ_0 :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \varphi_0(t) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)t\big)$$

3^o) En appliquant l'égalité ci-dessus en 0 on obtient $0 = \dfrac{\pi^2}{2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$ donc $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

4^o) On applique l'égalité de Parseval : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|\varphi_0(t)\big|^2\,dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$ or $\displaystyle\int_0^{\pi} \big(\varphi_0(t)\big)^2\,dt = \int_0^{\pi} \pi^2 t^2 dt = \frac{\pi^5}{3}$ donc $\displaystyle\frac{\pi^4}{3} = \frac{\pi^4}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{(2k+1)^2}\right)^2$ d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ puis
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = S' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S'}{16}$ donc $S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$.

(2) L'énoncé est imprécis, il aurait du imposer, par exemple, $y_0 \in]0; 2\pi[$.
(3) La convergence uniforme de la série se déduit aussi de la convergence absolue de la série des coefficients de Fourier.