

Questions préliminaires

0.1 Changer l'ordre des vecteurs de base pour amener en fin de liste les vecteurs de base du sous-espace stable.

0.2 Supposons A réductible et faisons le changement de base de la question 1; toutes les puissances de $\tilde{A}$ ont la même structure, en particulier le bloc de zéros (calcul d'un produit de matrices par blocs). Or dans un changement de base dont la matrice de passage est une matrice de permutation, les coefficients sont seulement déplacés, sans que leurs valeurs soient modifiées; A^p a donc des coefficients nuls.

0.3 Supposons A à coefficients positifs, et soit x un vecteur à coefficients positifs ayant $p < n$ coordonnées non nulles (exactement), tel que $(I + A)x$ n'ait que p coordonnées non nulles. Les p coordonnées non nulles de x restent non nulles dans $(I + A)x$ (à cause du terme Ix et de la positivité), par conséquent toutes les coordonnées nulles de x restent nulles dans Ax , donc le sous espace engendré par les vecteurs de base associés aux coordonnées non nulles de x est stable.

En appliquant $n - 1$ fois ce résultat à chacun des vecteurs de base, on constate que toutes les colonnes de $(I + A)^{n-1}$ ont n coefficients non nuls.

Problème

1.1 Sur Δ il y a au moins une coordonnée non nulle, le minimum est donc cherché sur un ensemble fini non vide: il existe. La positivité des coordonnées de $Ax - r(x)x$ est conséquence triviale de la définition de $r(x)$. On pourrait définir $r(x)$ comme le plus grand réel positif μ tel que $Ax - \mu x$ ait toutes ses coordonnées positives.

1.2 Si $A - r(x)x = 0$, x est vecteur propre (pour $r(x)$), donc y est proportionnel à x et $r(x) = r(y)$.

Sinon, $Ax - r(x)x$ appartient à Δ , donc $(I + A)^{n-1}(Ax - r(x)x)$ a toutes ses coordonnées strictement positives. Comme $(I + A)^{n-1}((A - r(x)I)x) = (A - r(x)I)((I + A)^{n-1}x) = Ay - r(y)y$, on constate, d'après la remarque faite à la question précédente, que $r(x) < r(y)$.

1.3 M est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$, donc compact; son image par l'application linéaire définie par $(I + A)^{n-1}$ (continue car en dimension finie toutes les applications linéaires le sont) est donc compacte.

Les coordonnées x_i ne s'annulent pas sur N qui est compact, elles sont continues, donc sont minorées par un réel $m > 0$; les applications $x \mapsto (Ax)_i$ sont aussi

continues, donc aussi les $x \mapsto \frac{(Ax)_i}{x_i}$ donc aussi r .

Attention, si f et g , à valeurs réelles, sont continues, $\min\{f, g\}$ l'est aussi car $\min\{f, g\} = f - \frac{1}{2}((f - g) + |f - g|)$; cela se généralise trivialement à un nombre fini de fonctions, mais pas à l'enveloppe inférieure d'une famille infinie de fonctions.

1.4 Propriété classique d'une fonction réelle continue sur un compact.

Dans l'énoncé, le quantificateur est placé incorrectement après la proposition qu'il quantifie.

1.5 Conséquence triviale de 1.2

1.6 Cela a été démontré en 1.2 (grâce à l'inégalité *stricte* lorsque x n'est pas propre).

1.7 Si un vecteur propre à coordonnées positives a une coordonnée nulle, on a une contradiction avec 0.3 (peu importe que la valeur propre soit $\tilde{r}$).

1.8 $(Ay^+)_i - |\alpha y_i| \geq |(Ay)_i| - |\alpha y_i| = 0$; on utilise alors la remarque faite en 1.1 puis 1.5

1.9 1.8 et 1.4 montrent que $r(y^+) = \tilde{r}$; la démonstration de 1.2 montre alors que y^+ est vecteur propre pour $\tilde{r}$; on applique alors 1.7

1.10 Si le sous espace était de dimension plus grande que 1, on pourrait former par combinaison linéaire un vecteur propre ayant une coordonnée nulle, ce qui contredirait 1.9

Application numérique

A^2 n'a aucun coefficient nul; on applique 0.2

Les questions suivantes sont de simples calculs.

Pour 2.4 il suffit de remarquer que $B_3^{(n)}_3$ est toujours supérieur à 1. *On cherche vainement le rapport de cette question avec le reste du problème.*