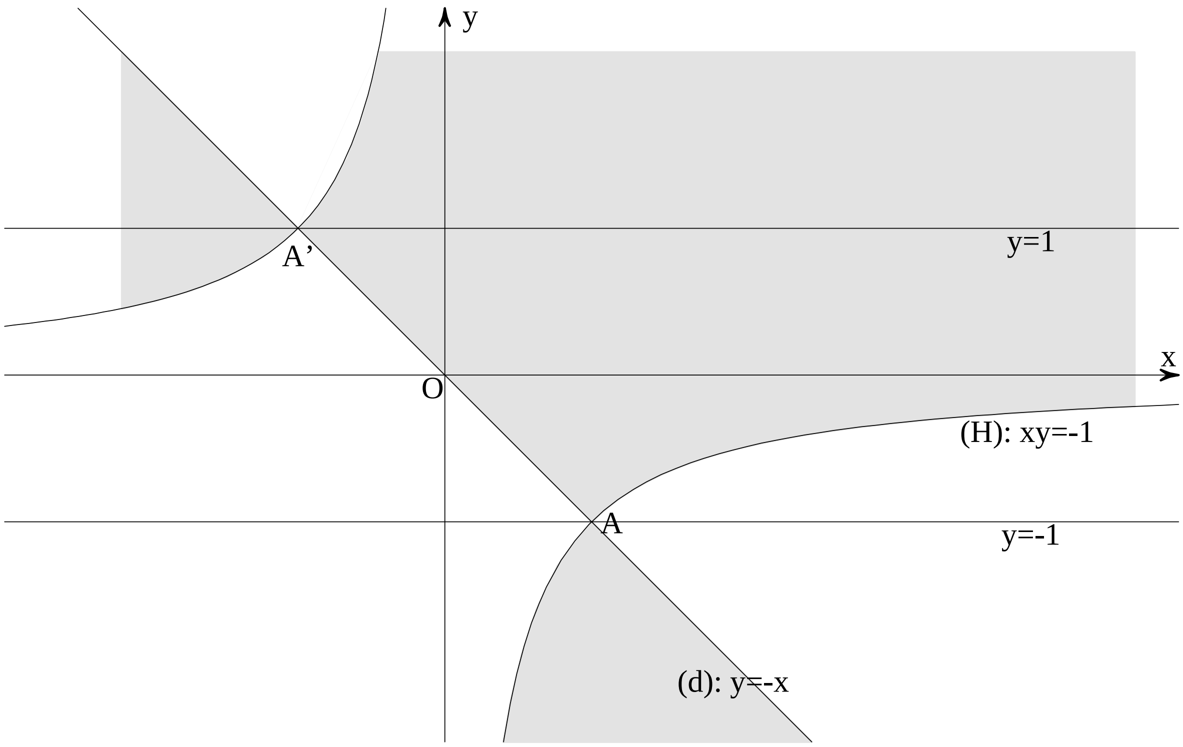
Concours ESIM 1999

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I - ANALYSE **Durée : 3 heures** **Filière PC**

PRELIMINAIRES

1. $f(x,y)$ est défini si et seulement si : $y \neq 1, y \neq -1$ et $(x+y)(1+xy) > 0$.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $x+y=0$ est l'équation de (d), la deuxième bissectrice des axes et $1+xy=0$ est l'équation de l'hyperbole équilatère (H), dont les axes du repère sont les asymptotes et (d) l'axe focal. Les sommets sont les deux points de (d) : $A(-1,1)$ et $A'(1,-1)$.
$x+y>0$ caractérise les points du "demi-plan ouvert situé au-dessus de (d)". Dans l'autre demi-plan ouvert bordé par (d), on a $x+y<0$. Entre les deux branches de l'hyperbole, on a $xy+1>0$. Pour les autres points du plan on a $xy+1 \leqslant 0$.
Les points du plan où $(x+y)(1+xy)>0$ sont ceux pour lesquels les deux quantités $x+y$ et $1+xy$ sont non nulles et de même signe. Leur ensemble apparaît en gris dans le dessin ci-dessous. Cet ensemble D' ne rencontre pas la droite $y=-1$ mais il rencontre la droite $y=1$. Il faut ôter de D' les points de cette droite pour obtenir l'ensemble de définition D de f.



L'ensemble D' des points (x,y) qui vérifient $(x+y)(1+xy)>0$ peut être vu comme l'image réciproque de $]0,+\infty[$, ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application $(x,y) \in \mathbb{R} \mapsto (x+y)(1+xy) \in \mathbb{R}$. Cette application est polynomiale, donc continue, donc D' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
De même, l'ensemble des points (x,y) qui vérifient $y \neq 1$ peut être vu comme l'image réciproque de $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}$, par l'application continue $(x,y) \in \mathbb{R} \mapsto y-1 \in \mathbb{R}$. Comme intersection de deux ouverts,

$$\boxed{D \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2.}$$

2. $\forall (x,y) \in D,\quad 1+xy \neq 0$ donc $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{1+xy}$, quotient de deux fonctions polynômes, est C^1 sur D, à valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition par $\ln$, qui est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $(x,y) \mapsto \ln\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$ est C^1 sur D.

$\forall (x,y) \in D,\quad 1-y^2 \neq 0$ donc $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{1-y^2}$ est C^1 sur D. Comme produit de fonctions C^1,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } C^1 \text{ sur } D.}$$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(1-y^2)}\left[\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{y}{1+xy}\right] = \dfrac{1}{(x+y)(1+xy)}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{(1-y^2)^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) + \frac{1}{(1-y^2)}\left[\frac{1}{x+y} - \frac{x}{1+xy}\right] = \frac{2y}{(1-y^2)^2}\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) + \frac{1}{(1-y^2)}.\frac{1-x^2}{(x+y)(1+xy)}.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x+y)(1+xy)} \quad \text{et} \quad (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y) = \frac{1-x^2}{(x+y)(1+xy)} = (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),}$$

ce qui prouve que

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur l'ouvert } D.}$$

5. Il est clair sur le dessin précédent que si $x > 0$ et $y \in]0,1[$, le couple (x, y) est dans D, ainsi que le couple $(1/x, y)$.
Pour un tel couple $f(1/x, y) = \dfrac{1}{(1-y^2)} \ln\left(\dfrac{1+xy}{x(1+y/x)}\right) = \dfrac{1}{(1-y^2)} \ln\left(\dfrac{1+xy}{x+y}\right)$ donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \forall y \in]0,1[, \quad \text{on a } f(1/x, y) = -f(x, y).}$$

5. Là aussi, le dessin permet de constater que $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in]0, 1[$, le couple (x, y) est dans D.
Pour un tel couple, $\quad \dfrac{x+y}{1+xy} - 1 = \dfrac{(1-x)(y-1)}{1+xy} \quad$ et $\quad \dfrac{x+y}{1+xy} - y = \dfrac{x(1-y^2)}{1+xy}$ donc

• Si $x \in [0, 1]$, $0 < y \leqslant \dfrac{x+y}{1+xy} \leqslant 1$ et donc $\ln y \leqslant \ln\left[\dfrac{x+y}{1+xy}\right] \leqslant 0$, donc $\left|\ln\left[\dfrac{x+y}{1+xy}\right]\right| \leqslant |\ln y|$

• Si $x > 1$, $\left|\ln\left[\dfrac{x+y}{1+xy}\right]\right| = \left|\ln\left[\dfrac{1/x+y}{1+y/x}\right]\right| \leqslant |\ln y|$. Dans les deux cas

$$\boxed{\left|\ln\left[\dfrac{x+y}{1+xy}\right]\right| \leqslant |\ln y|}$$

6. $f(0, y) = \dfrac{1}{1-y^2} \ln(y)$ est définie, continue, négative sur $]0, 1[$, équivalente, quand $y \to 1-$, à $\dfrac{y-1}{1-y^2} = -\dfrac{1}{1+y}$.
$f(0, y)$ est donc prolongeable par continuité sur $]0, 1]$.
$f(0, y)$ est équivalente, quand $y \to 0+$, à $\ln y$, dont on sait qu'elle est intégrable sur $]0, 1]$. Finalement

$$\boxed{f(0, y) \text{ est intégrable sur }]0, 1].}$$

Pour tout x fixé, avec $x \geqslant 0$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue sur $]0, 1[$ et, d'après **5.**, vérifie $|f(x, y)| \leqslant |f(0, y)|$. Donc, par comparaison,

$$\boxed{y \mapsto f(x, y) \text{ est intégrable sur }]0, 1[}$$

PARTIE I : ETUDE DE F

On a donc, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{]0,1[} \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) dy.$ $\qquad$ Notons P l'ensemble $[0, +\infty[\times]0, 1[$.

7.a) f est continue sur P, qui est une partie de D. De plus : $\forall (x, y) \in P, |f(x, y)| \leqslant |f(0, y)|$, qui est continue, intégrable sur $]0, 1[$, indépendante de x. Par application du théorème de domination pour une intégrale à paramètre :

$$\boxed{F \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

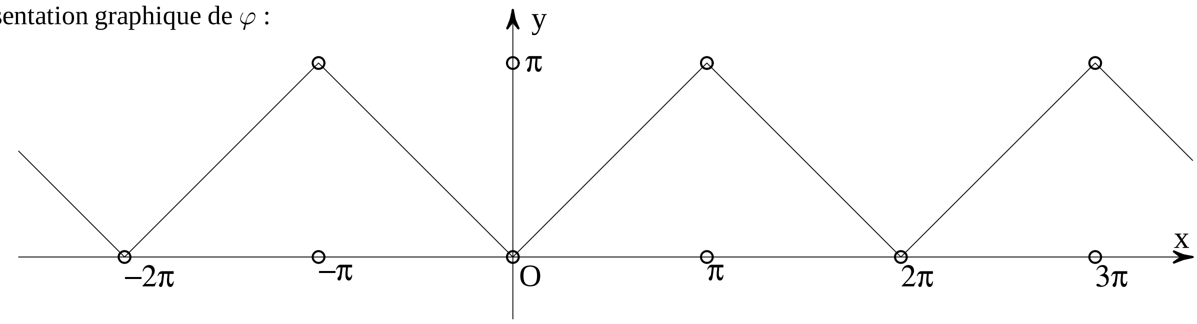
7.b) Pour tout $x > 0$, on a $f(1/x, y) = -f(x, y)$. Il en résulte :

$$\boxed{\forall x > 0, F(\frac{1}{x}) = -F(x), \text{ donc } F(1) = 0.}$$

7.c) Quand $x \to +\infty$, $\quad 1/x \to 0+$ donc $F(1/x) \to F(0)$, puisque F est continue en 0. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} (F(x)) = -F(0).}$$

8.a) Représentation graphique de φ :



Il est clair que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, elle est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier. Calculons les coefficients :
φ est paire, donc les b_n sont nuls et :

• $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t dt = \pi$.

• Pour $n > 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos nt dt = \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n}dt\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right]$.

Donc a_{2n} est nul et $a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2}$. Pour tout x on a donc $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

En particulier pour $x = 0$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

8.b) On sait que $\forall y \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-y^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n}$ (série géométrique). Donc $\forall y \in]0,1[$, $\dfrac{\ln y}{1-y^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n}\ln y$.

Pour tout entier n, la fonction $u_n : y \mapsto y^{2n}\ln y$ est réelle, définie, continue, négative sur $]0,1]$, intégrable (même pour $n = 0$). La série $\sum u_n$ converge simplement (au moins) sur $]0,1[$, avec pour somme la fonction $y \mapsto \dfrac{\ln y}{1-y^2}$, qui est intégrable sur $]0,1]$ (c'est $f(0,y)$).
On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions et intégrer la série terme à terme :

$$F(0) = \int_{]0,1[}\frac{\ln y}{1-y^2}dy = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{]0,1[} y^{2n}\ln y dy.$$

$\displaystyle\int_{]0,1[} y^{2n}\ln y dy = \left[\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\ln y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{2n}}{2n+1}dy = -\frac{1}{(2n+1)^2}$. Finalement :

$$\boxed{F(0) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{8}.}$$

9.a) f admet sur l'ensemble P des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{(x+y)(1+xy)}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{1+2xy+y^2}{(x+y)^2(1+xy)^2}$. Cette dernière est négative donc, à y fixé dans $]0,1[$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Si $0 < a \leqslant x$, on a donc $0 < \dfrac{1}{(x+y)(1+xy)} \leqslant \dfrac{1}{(a+y)(1+ay)} = g(y)$. g est définie, continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $]0,1[$.

Outre l'hypothèse de domination pour f sur $P = [0,+\infty[\times]0,1[$ établie au **7.a)**, et qui est a fortiori valable sur l'ensemble $P_a = [a,+\infty[\times]0,1[$, on a donc aussi la domination sur cet ensemble P_a de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, fonction continue sur P_a, par une fonction continue de y, indépendante de x, intégrable sur $]0,1[$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale à la fonction F sur tout intervalle $[a,+\infty[$, et ceci pour tout $a > 0$, d'où

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{, avec } F'(x) = \int_{]0,1[}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy = \int_{]0,1[}\frac{1}{(x+y)(1+xy)}dy.}$$

9.b) Pour faire le calcul de $F'(x)$, on peut décomposer la fraction en éléments simples ou bien remarquer que $(1-y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y) = (1-x^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, trouvé au **3**, donne pour $x \neq 1$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{1-x^2}\left[(1-y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2yf(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{1}{(1-x^2)}(1-y^2)f(x,y)\right]$, ce qui fournit une primitive de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ vu comme fonction de y, à x fixé $\neq 1$, notamment pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $y \in]0,1[$.

D'où $F'(x) = \left[\dfrac{1}{(1-x^2)}(1-y^2)f(x,y)\right]_0^1$ donc

$$\boxed{\text{pour } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\text{, } F'(x) = -\frac{f(x,0)}{1-x^2} = \frac{\ln x}{x^2-1}}$$

9.c) $2F'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x^2-1} = \dfrac{\ln(x^2)}{x^2-1}$, qui tend vers 1 quand x tend vers 1.

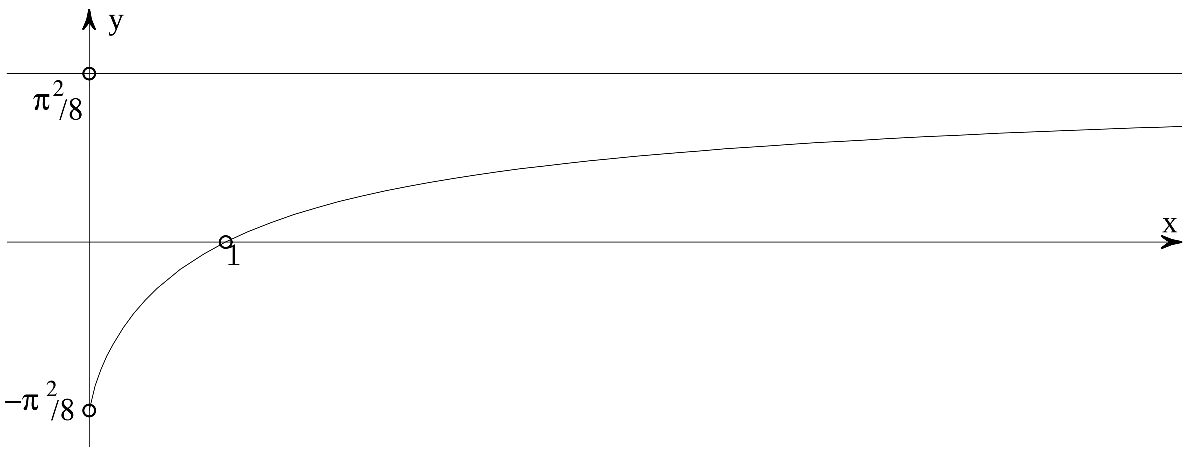
Comme $F'(1)$ est la limite de $F'(x)$ quand x tend vers 1 :

$$\boxed{F'(1) = \frac{1}{2}.}$$

Quand x tend vers 0, $F'(x)$ est équivalent à $-\ln x$ et tend donc vers $+\infty$. On sait que, dans ces conditions

$$\boxed{F \text{ n'est pas dérivable en } 0 \text{ et la courbe représentative admet une demi-tangente « verticale » en } O.}$$

10.) F' est > 0 sur $]0, +\infty[$ donc F est croissante. On a suffisamment de renseignements pour faire la représentation graphique. On peut quand même préciser que $F''(x) = -\dfrac{x^2+1}{x(1-x^2)^2}$, négatif sur $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$: la courbe est concave.



PARTIE II : RESOLUTION DE (E)

11.a) Posons $u = x + y$ et $v = xy$ donc $\Psi(x, y) = (u, v)$. $\quad \forall (x, y) \in \Omega$, $u^2 - 4v = (x - y)^2 > 0$: Ψ est bien à valeurs dans Ω'.
Réciproquement, (u, v) étant fixé dans Ω', cherchons (x, y) vérifiant : $\quad u = x + y, \quad v = xy \quad y < x$.
Cela équivaut à dire que x et y sont les racines de l'équation $X^2 - uX + v$, x étant la plus grande. Comme cette équation admet un discriminant $u^2 - 4v$ strictement positif, cette équation admet effectivement deux racines distinctes.
Le couple (u, v) admet donc un antécédent unique par Ψ ; Ψ est donc une bijection de Ω vers Ω'.
Cette bijection est de classe C^1 car ses deux composantes sont polynomiales.

$$\boxed{\Psi \text{ est une bijection de classe } C^1 \text{ de } \Omega \text{ sur } \Omega'.}$$

11.b) La matrice jacobienne de Ψ est $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}$. Le jacobien de Ψ au point (x, y) est $x - y$. En tout point de Ω, il est non nul. D'après le théorème de caractérisation à l'aide du jacobien des C^1-difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$,

$$\boxed{\Psi \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de classe } C^1 \text{ de } \Omega \text{ sur } \Omega'}$$

12.a) On donne g de classe C^1 de Ω vers $\mathbb{R}$. Ψ étant un C^1-difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur Ω', Ψ^{-1} existe et est de classe C^1 de Ω' sur Ω. Posons donc $h = g \circ \Psi^{-1}$, ce qui assure que h est de classe C^1 de Ω' vers $\mathbb{R}$ et que $g = h \circ \Psi$, autrement dit $g(x, y) = h(x + y, xy)$.

$$\boxed{\text{On a trouvé } h \text{ de classe } C^1 \text{ de } \Omega' \text{ vers } \mathbb{R} \text{ telle que } \forall (x, y) \in \Omega,\ g(x, y) = h(x + y, xy).}$$

12.b) En utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée, on obtient
$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(x + y, xy) + y\dfrac{\partial h}{\partial v}(x + y, xy) \qquad$ et $\qquad \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial h}{\partial u}(x + y, xy) + x\dfrac{\partial h}{\partial v}(x + y, xy)$.
L'égalité sur Ω de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ équivaut donc à la nullité de $(y - x)\dfrac{\partial h}{\partial v}(x + y, xy)$ sur Ω, ou encore, puisque $y - x$ est non nul sur Ω, à celle de $\dfrac{\partial h}{\partial v}(x + y, xy)$ sur Ω ou enfin, par composition par Ψ^{-1}, à celle de $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ sur Ω'.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \Omega,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \quad \text{équivaut à : } \quad \forall (u, v) \in \Omega',\ \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = 0.}$$

13.a) La fonction th est un C^1-difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et H est C^1 sur Ω_1.
Par composition et produit, $G(u,v)=(1-\mathrm{th}^2 v)H(\mathrm{th}\,u,\mathrm{th}\,v)$ est donc C^1 sur Ω et :

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial u}(u,v)=(1-\mathrm{th}^2 v)(1-\mathrm{th}^2 u)\frac{\partial H}{\partial x}(\mathrm{th}\,u,\mathrm{th}\,v) \text{ et } \frac{\partial G}{\partial v}(u,v)=-2\,\mathrm{th}\,v(1-\mathrm{th}^2 v)H(\mathrm{th}\,u,\mathrm{th}\,v)+(1-\mathrm{th}^2 v)^2\frac{\partial H}{\partial y}(\mathrm{th}\,u,\mathrm{th}\,v).}$$

13.b) H vérifie (E) sur l'ouvert Ω_1 ; nous pouvons donc recopier l'égalité (E) en remplaçant φ par H et le couple (x,y) par un couple quelconque $(\mathrm{th}\,u,\mathrm{th}\,v)$ tel que $\mathrm{th}\,v<\mathrm{th}\,u$, autrement dit $v<u$.
En utilisant **13.a)**, l'égalité obtenue équivaut à $\forall(u,v)\in\Omega,\ \dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$.
Utilisons la question **12)** en y remplaçant les lettres u et v par U et V puisque, malencontreusement, l'énoncé utilise deux fois la notation (u,v) pour désigner des choses différentes. (il aurait mieux valu par exemple poser $X=x+y$ et $Y=xy$)
La propriété $\forall(u,v)\in\Omega,\ \dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ équivaut à $\forall(U,V)\in\Omega',\ \dfrac{\partial h}{\partial V}(U,V)=0$, avec ici $G=h\circ\Psi$.
Cela équivaut à dire que h est une fonction F de U seulement et comme, quand (U,V) décrit Ω', U prend toute valeur réelle, cette fonction F doit être C^1 sur $\mathbb{R}$.
Donc, quand (u,v) décrit Ω, $G(u,v)$ est de la forme $F(u+v)$ avec F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc
$H(\mathrm{th}\,u,\mathrm{th}\,v)=\dfrac{1}{1-\mathrm{th}^2 v}F(u+v)$. Posons alors $\Phi=F\circ\mathrm{th}^{-1}$. Par composition, Φ est C^1 de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$ et
$H(\mathrm{th}\,u,\mathrm{th}\,v)=\dfrac{1}{1-\mathrm{th}^2 v}\Phi(\mathrm{th}(u+v))=\dfrac{1}{1-\mathrm{th}^2 v}\Phi\left(\dfrac{\mathrm{th}\,u+\mathrm{th}\,v}{1+\mathrm{th}\,u\,\mathrm{th}\,v}\right)$, quel que soit le couple (u,v) tel que $v<u$.
Pour tout (x,y) dans Ω_1, on a donc $H(x,y)=\dfrac{1}{1-y^2}\Phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$. Résumons

$$\boxed{\text{Il existe une fonction } \Phi \text{ qui est } C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ telle que } \forall(x,y)\in\Omega_1, H(x,y)=\frac{1}{1-y^2}\Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}$$

14. Réciproquement, si Φ est C^1 de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$, la fonction H définie par la formule précédente est solution de (E) sur Ω_1. En effet :
• D'abord, pour $(x,y)\in\Omega_1$, on peut interpréter x et y comme $\mathrm{th}\,u$ et $\mathrm{th}\,v$, ce qui fait apparaître $\dfrac{x+y}{1+xy}$ comme étant $\mathrm{th}(u+v)$ et assure son appartenance à $]-1,1[$. H est donc bien définie et de classe C^1 sur G_1.
• Ensuite $(1-x^2)\dfrac{\partial H}{\partial x}=(1-x^2)\left[\dfrac{1}{(1+xy)^2}\Phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)\right]$ et $\dfrac{\partial H}{\partial y}=\dfrac{2y}{(1-y^2)^2}\Phi\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)+\dfrac{1}{1-y^2}.\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2}\Phi'\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$
si bien que $(1-y^2)\dfrac{\partial H}{\partial y}=2yH(x,y)+(1-x^2)\dfrac{\partial H}{\partial x}$: H vérifie (E) sur Ω_1.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \Omega_1 \text{ sont les fonctions } H \text{ de la forme précédente.}}$$

<u>Remarque :</u> La fonction f étudiée dans le préliminaire est de la forme précédente, mais c'est une solution de (E) sur D, dont l'intersection avec Ω_1 est $[0,1[\times]0,1[$.