Corrigé X - E.N.S. 1999 - (Maths - PSI)

François Jaboeuf - PSI* - Joffre-MONTPELLIER

26 avril 2001

PARTIE I

1 Question N° 1:

1.a

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ quand $x \to \pm\infty$. En notant $C(2a)$ le carré de centre O et de côtés de longueur 2a, paralèlles aux axes, et circonscrit au cercle de centre O et de rayon a ; $C(a\sqrt{2})$, son homothétique dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$, est inscrit sur le cercle précédent d'où : $C(a\sqrt{2}) \subset D(a) \subset C(2a)$, et donc $\boxed{\iint_{C(a\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leq \iint_{C(2a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy}$. Le théorème de Fubini, appliqué aux deux intégrales sur les domaines carrés $C(a\sqrt{2})$ et $C(2a)$ donne : $\iint_{C(a\sqrt{2})} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_{-a\frac{\sqrt{2}}{2}}^{a\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-x^2}\,dx\right)^2$ et $\iint_{C(2a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$. Les deux dernières intégrales ayant I pour limite quand $a \to +\infty$, le théorème d'existence de limite par encadrement prouve que $\lim_{a\to+\infty} \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = I^2$. D'où l'égalité demandée, si l'on suppose connu que $J = \lim_{a\to+\infty} \iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$: $\boxed{J = I^2}$.

1.b

L'application définie par $(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et de jacobien r ; par ce changement de variable dans l'intégrale double $\iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ puis par Fubini, on obtient :
$\iint_{D(a)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a re^{-r^2}dr\right) d\theta = 2\pi \int_0^a re^{-r^2}dr = \pi[-e^{-r^2}]_0^a = \pi(1-e^{-a^2})$.

Ainsi quand $a \to +\infty$: $\boxed{I^2 = J = \pi}$ et puisque I est visiblement positive : $\boxed{I = \sqrt{\pi}}$.

2 Question N° 2:

Le changement de variable défini par $u \mapsto x = \frac{u}{\sqrt{\epsilon}}$, C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ permet d'obtenir à la fois l'existence et la valeur de l'intégrale demandée : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}du = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}}$.

3 Question N° 3:

3.a

Sachant que pour tous a et x dans $\mathbb{R}$ $|e^{iax}| = 1$ et compte-tenu de l'inégalité du module des intégrales on a immédiatement : $|F_\epsilon(a)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon x^2}dx$ et d'après 2. : $\forall a \in \mathbb{R},\ |F_\epsilon(a)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}$.

3.b

La fonction $f : (a,x) \mapsto e^{iax-\epsilon x^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, dominée pour tout a réel par la fonction intégrable sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto e^{-\epsilon x^2}$ et sa dérivée partielle : $\frac{\partial}{\partial a}(f) : (a,x) \mapsto ixe^{iax-\epsilon x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, dominée pour tout a dans un segment $[-\alpha,\alpha]$ par la fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \alpha x e^{-\epsilon x^2}$. Le théorème de dérivation sous l'intégrale impropre avec hypothèses

de domination s'applique donc : $F'_\epsilon(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{iax-\epsilon x^2}dx$ sur tout segment $[-\alpha,\alpha]$ et par suite sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad F'_\epsilon(a) + \frac{a}{2\epsilon}F_\epsilon(a) = \int_{-\infty}^{+\infty}(ix + \frac{a}{2\epsilon})e^{iax-\epsilon x^2}dx = \frac{-i}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}(ia - 2\epsilon x)e^{iax-\epsilon x^2}dx = \frac{-i}{2\epsilon}\left[e^{iax-\epsilon x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

(puisque $|e^{iax-\epsilon x^2}| = e^{-\epsilon x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$).

3.c

L'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre de la question précédente a pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme : $a \mapsto \lambda e^{-\int_0^a \frac{t}{2\epsilon}dt} = \lambda e^{-\frac{a^2}{4\epsilon}}$ et donc, compte-tenu de la valeur en 0 de la solution F_ϵ (cf. 2.) :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ F_\epsilon(a) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\, e^{-\frac{a^2}{4\epsilon}}}$$

4 Question N° 4:

Puisque $\epsilon > 0$, Le trinôme $bx - \frac{\epsilon}{2}x^2$ admet $\frac{b^2}{2\epsilon}$ pour maximum atteint en $x = \frac{b}{\epsilon}$ (on peut le mettre sous sa forme canonique : $bx - \frac{\epsilon}{2}x^2 = \frac{b^2}{2\epsilon} - \frac{\epsilon}{2}(x - \frac{b}{\epsilon})^2 \le \frac{b^2}{2\epsilon}$). L'inégalité précédente prouve que la fonction continue sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto e^{bx-\epsilon x^2} = e^{bx-\frac{\epsilon}{2}x^2}e^{-\frac{\epsilon}{2}x^2}$ est dominée par la fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto e^{-\frac{\epsilon}{2}x^2}$ et donc est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'où, pour tout b réel, l'existence de $G_\epsilon(b)$ et la majoration : $G_\epsilon(b) \le e^{\frac{b^2}{2\epsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\epsilon}{2}x^2}\,dx$ et d'après 2. : $\boxed{G_\epsilon(b) \le \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon}}e^{\frac{b^2}{2\epsilon}}}$. Le majorant ainsi trouvé dépend de b (!).

Calcul de $G_\epsilon(b)$: D'après le début de cette question en remplaçant ϵ par 2ϵ on peut écrire : $G_\epsilon(b) = e^{\frac{b^2}{4\epsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon(x-\frac{b}{2\epsilon})^2}dx = e^{\frac{b^2}{4\epsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon u^2}\,du$ (par le changement de variable $u = x - \frac{b}{2\epsilon}$, C^1- difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$). D'où, d'après 2. : $\boxed{\forall b \in \mathbb{R},\ G_\epsilon(b) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}}$

Puisque $\lim_{b\to\pm\infty} e^{\frac{b^2}{4\epsilon}} = +\infty$ la fonction $b \mapsto G_\epsilon(b)$ n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}$.

5 Question N° 5:

Pour z complexe, la fonction $x \mapsto e^{izx-\epsilon x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de module $e^{-\Im(z)x-\epsilon x^2}$ intégrable d'après 4. avec $b = -\Im(z)$, donc l'intégrale $\widetilde{F}_\epsilon(z)$ existe pour tout z complexe. Ecrivons, comme au 4. avec $b = -\Im(z)$, $izx - \epsilon x^2 = i\Re(z)x - \epsilon(x + \frac{\Im(z)}{2\epsilon})^2 + \frac{\Im(z)^2}{4\epsilon}$ et le changement de variable $u = x + \frac{\Im(z)}{2\epsilon}$: $\widetilde{F}_\epsilon(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\Re(z)(u-\frac{\Im(z)}{2\epsilon})+\frac{\Im(z)^2}{4\epsilon}-\epsilon u^2}du = e^{\frac{\Im(z)}{4\epsilon}(\Im(z)-2i\Re(z))}F_\epsilon(\Re(z))$. D'après 3.c :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \widetilde{F}_\epsilon(z) = e^{\frac{\Im(z)}{4\epsilon}(\Im(z)-2i\Re(z))}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\,e^{-\frac{\Re(z)^2}{4\epsilon}} = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\,e^{-\frac{z^2}{4\epsilon}}}$$

On peut remarquer que la formule trouvée recouvre bien tous les cas particuliers des questions 2. (cas z=0), 3. (cas z=a), et 4. (cas z=-ib).

PARTIE II

Mais où est passée la question 6 ?

7 Question N° 7:

7.a

Il s'agit donc de déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}}(x^N e^{-\frac{x^2}{2}})$, et comme la fonction φ_N : $x \mapsto x^N e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire si N l'est, impaire et négative sur $\mathbb{R}_-$ si N est impair, il suffit de déterminer la borne supérieure de cette fonction sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\varphi'_N(x) = (N - x^2)x^{N-1}e^{-\frac{x^2}{2}}$, on a immédiatement le tableau de variations suivant et la borne supérieure cherchée est atteinte pour $x = \sqrt{N}$:

x	0		$\sqrt{N}$		$+\infty$
$\varphi'_N(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi_N(x)$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{N}{2}}$	$\searrow$	0

D'où : $\boxed{C(N) = \left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{N}{2}}}$.

7.b

L'existence des intégrales étudiées dans cette question et la suivante découle de l'intégrabilité des fonctions (continues et négligeables devant $\frac{1}{x^2}$ quand $x \to \pm\infty$) $x \mapsto x^m e{-}x^2$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier positif m. Suivant l'énoncé, discutons selon les deux cas $A \leq 1$ et $A \geq 1$:

1. Cas $A \leq 1$: On a alors les inégalités : $A^n \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, puisque $n > 0,\ A \geq 0$ *et* $e^{-x^2} > 0$. Compte-tenu du résultat du 1.b et de la parité de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ on obtient la majoration : $A^n \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
2. Cas $A \geq 1$: Comme $n > 0$, pour $x \in [A, +\infty]$, on a $x^n \geq A^n$ et donc : $A^n \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_A^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$. En écrivant $e^{-x^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et compte-tenu de la positivité de A et de $x^n e^{-x^2}$, du 1.b et de la majoration du 7.a, on obtient : $\int_A^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx \leq C(n) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(n)$.

Ainsi pour tout $A \geq 0$: $A^n \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \max(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(n))$ et la constante $\boxed{C = \max\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(n)\right)}$ convient.

Remarquons que la démonstration du 2ème cas reste valable même si A est dans $[0, 1]$ *et que le résultat reste vérifié pour* $n = 0$

7.c

Un raisonnement similaire au précédent conduit aux majorations suivantes :

$A^n \int_A^{+\infty} x^m e^{-x^2}\,dx \leq \int_A^{+\infty} x^{n+m} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(n+m)$. La constante $\boxed{M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(n+m)}$ convient. *Remarquons que ce résultat reste valable même si A est dans* $[0, 1]$ *ou si* $m \leq 0$ *à condition que* $n + m \geq 0$

7.d

On utilise les résultats du 7.c en substituant $A\sqrt{k}$ à A et N à n : le changement de variable : $u \mapsto x = \frac{u}{\sqrt{k}}$, C^1 - difféomorphisme de $[A\sqrt{k}, +\infty[$ sur $[A, +\infty[$, assure l'existence de l'intégrale proposée et l'égalité : $\int_A^{+\infty} x^m e^{-kx^2} dx = \frac{1}{(\sqrt{k})^{m+1}} \int_{A\sqrt{k}}^{+\infty} u^m e^{-u^2}\,du$; d'où :

$$0 \leq k^n \int_A^{+\infty} x^m e^{-kx^2}\,dx = k^{\frac{2n-m-1}{2}} \int_{A\sqrt{k}}^{+\infty} u^m e^{-u^2} du \leq k^{\frac{2n-m-1}{2}} \frac{M}{(A\sqrt{k})^N} = \frac{1}{k^{\frac{N-2n+m+1}{2}}} \frac{M}{A^N}$$

($M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(N+m)$ dépend de m et N mais pas de k et en principe il faut $A\sqrt{k} \geq 1,\ m \geq 0$ *et* $N \geq 0$ mais on a déja remarqué que la première condition (vérifiée quand $k \to +\infty$) était inutile et qu'il suffisait d'avoir $N + m \geq 0$ au lieu de $m \geq 0$ - on peut aussi supposer, compte tenu du contexte de l'énoncé, que l'expression "entier " signifie "entier naturel"). Il suffit donc de choisir $N \geq 0$ *et* $N > 2n - m - 1$ *et* $N + m \geq 0$ et alors : $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^{\frac{N-2n+m+1}{2}}} = 0$ et l'encadrement précédent donne le résultat demandé : $\boxed{\lim_{k \to +\infty} k^n \int_A^{+\infty} x^m e^{-kx^2}\,dx = 0}$

8 Question N° 8:

D'après 2. : $\sqrt{\frac{\pi}{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx$ et le changement de variable $u \mapsto x = x_0 + u$, de classe C^1 dans l'intégrale (ordinaire) de l'énoncé donne : $\int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2}\,dx = \int_{a_1-x_0}^{a_2-x_0} e^{-ku^2}\,du$. Par la relation de Chasles on obtient : $\sqrt{\frac{\pi}{k}} - \int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{a_1-x_0} e^{-ku^2} du + \int_{a_2-x_0}^{+\infty} e^{-ku^2} du$. En changeant u en -u dans la première intégrale et par l'inégalité triangulaire : $|\sqrt{\frac{\pi}{k}} - \int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2} dx| \leq \int_{x_0-a_1}^{+\infty} e^{-ku^2}\,du + \int_{a_2-x_0}^{+\infty} e^{-ku^2}\,du$. Remarquons que les deux nombres $x_0 - a_1$ et $a_2 - x_0$ sont strictement positifs et que l'on peut appliquer les majorations du 7.d avec $m = 0$ et $n = q$ et $N = 2q - 1 > 0$, pour obtenir :

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \quad k^q \left| \sqrt{\frac{\pi}{k}} - \int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2}\,dx \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(2q-1) \left(\frac{1}{(x_0 - a_1)^{2q-1}} + \frac{1}{(a_2 - x_0)^{2q-1}} \right)$$

La constante $\boxed{D = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C(2q-1) \left(\frac{1}{(x_0 - a_1)^{2q-1}} + \frac{1}{(a_2 - x_0)^{2q-1}} \right)}$ convient donc. On peut en déduire un équivalent de l'intégrale $\int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2} dx$ quand $k \to +\infty$, puique la majoration établie (en prenant $q = 1$) prouve que $\int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2} dx - \sqrt{\frac{\pi}{k}} = \underset{k \to +\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{k}) = \underset{k \to +\infty}{o}(\frac{1}{\sqrt{k}})$. Soit finalement :

$$\boxed{\int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2} dx \underset{k \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{k}}}$$

9 Question N° 9:

9.a

La fonction continue $\phi^{(2)}$ ne s'annulant pas en x_0 garde un signe constant et ne s'annule pas sur un voisinage convenable $[\alpha,\beta]$ de x_0 inclus dans $[a_1,a_2]$. La fonction $\phi(x_0)-\phi$ continue et strictement positive sur le compact $[a_1,\alpha]\cup[\beta,a_2]$ admet un minimum strictement positif que l'on note $2\alpha_0$.

Ainsi la fonction $\phi(x_0)-\phi-\alpha_0$ est continue sur $[a_1,a_2]$, strictement positive (et même minorée par α_0) sur $[a_1,\alpha]\cup[\beta,a_2]$ et prend la valeur strictement négative $-\alpha_0$ au point x_0 dans $[\alpha,\beta]$. L'équation de l'énoncé n'a donc aucune solution dans $[a_1,\alpha]\cup[\beta,a_2]$ et le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence de x_- dans l'intervalle $]\alpha,x_0[$ et de x_+ dans l'intervalle $]x_0,\beta[$ qui annulent la fonction $\phi(x_0)-\phi-\alpha_0$; ce sont bien les deux solutions cherchées et il reste à en prouver l'unicité dans $[\alpha,\beta]$. Remarquons que $\boxed{\phi^{(2)}(x_0)<0}$ puisque sinon $\phi^{(2)}>0$ sur $[\alpha,\beta]$ et donc ϕ' serait strictement croissante en s'annulant au maximum x_0 : ϕ' serait strictement négative dans $[\alpha,x_0[$ puis strictement positive dans $]x_0,\beta]$, ce qui donnerait un minimun strict en x_0 et non un maximum. Ainsi $\phi'>0$ sur $[\alpha,x_0[$ et $\phi'<0$ sur $]x_0,\beta]$, donc la fonction $\phi(x_0)-\phi-\alpha_0$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha,x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0,\beta]$, ce qui assure l'unicité de x_- dans $]\alpha,x_0[$ et de x_+ dans $]x_0,\beta[$ et finalement l'unicité de $\{x_-,x_+\}$ dans $[a_1,a_2]$.

9.b

D'après 9.a la fonction ϕ est majorée par $\phi(x_0)-2\alpha_0$ sur la réunion $[a_1,\alpha]\cup[\beta,a_2]$ et par $\phi(x_0)-\alpha_0$ sur $[\alpha,x_-]\cup[x_+,\beta]$; on a en effet le tableau de variations de la fonction $\phi(x_0)-\phi-\alpha_0$ sur $[\alpha,\beta]$:

x	α	x_-	x_0	x_+	β
$\phi(x_0)-\phi-\alpha_0$		$0\searrow$	$-\alpha_0$	$0\nearrow$	

Ainsi la fonction ϕ est majorée par $\phi(x_0)-\alpha_0$ sur la réunion $[a_1,x_-]\cup[x_+,a_2]$ et on en déduit pour $k>0$ les majorations suivantes de $|I_-^M(k)|$ et de $|I_+^M(k)|$:

$$|I_-^M(k)|\le k^M e^{k(\phi(x_0)-\alpha_0)}\int_{a_1}^{x_-}|a(x)|dx \quad et \quad |I_+^M(k)|\le k^M e^{k(\phi(x_0)-\alpha_0)}\int_{x_+}^{a_2}|a(x)|\,dx$$

Comme $\alpha_0>0$, $\lim\limits_{k\to+\infty}k^M e^{-k\alpha_0}=0$, on obtient bien le résultat demandé :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty}e^{-k\phi(x_0)}I_-^M(k)=\lim_{k\to+\infty}e^{-k\phi(x_0)}I_+^M(k)=0}$$

9.c

La fonction $\phi : x\mapsto x^2$ est C^∞ sur $[-1,1]$ et, si on choisit $x_0=0$, (ii) est vérifiée mais non (i) et 9.a est impossible (l'équation $\phi(y)=0-\alpha_0$ ne peut avoir de solution car $-\alpha_0<0$ et $y^2\ge 0$).

La fonction $\phi : x\mapsto -x^4$ est C^∞ sur $[-1,1]$ et, si on choisit $x_0=0$, (i) est vérifiée mais non (ii) et 9.a est impossible car, pour tout $\alpha_0\in]0,1]$ on trouve nécessairement $x_-=-\sqrt[4]{\alpha_0}$ et $x_+=\sqrt[4]{\alpha_0}$ et $\phi^{(2)}$ s'annule en 0 dans l'intervalle $[x_-,x_+]$ et pour $\alpha_0>1$ il n'existe pas de solutions x_-,x_+ dans $[-1,1]$.

Les deux conditions (i) et (ii) sont donc nécessaires pour obtenir 9.a, mais 9.b reste valable sous la seule hypothèse (i), à condition d'avoir $a_1\le x_-<x_0<x_+\le a_2$ puisque la majoration utilisée en 9.b reste valable en prenant $\alpha_0=\max\{\phi(x_0)-\phi(x)\ ;\ x\in[a_1,x_-]\cup[x_+,a_2]\}>0$ (car la fonction $\phi(x_0)-\phi$ est continue et strictement positive sur le compact $[a_1,x_-]\cup[x_+,a_2]$) .

9.d

Clairement, compte-tenu de (i), la fonction l : $x\mapsto\sqrt{2\frac{\phi(x_0)-\phi(x)}{(x-x_0)^2}}$ est bien définie et continue sur $[x_-,x_+]\setminus\{x_0\}$ et strictement positive. Il s'agit de la prolonger par continuité en x_0 ; comme ϕ est C^2, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en x_0 et sachant que $\phi'(x_0)=0$, on obtient quand $x\to x_0$: $\phi(x)=\phi(x_0)+\frac{\phi^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$. Finalement : $\lim\limits_{x\to x_0}2\frac{\phi(x_0)-\phi(x)}{(x-x_0)^2}=-\phi^{(2)}(x_0)>0$ d'où l'unicité de la fonction l définie et continue sur $[x_-,x_+]$: $l(x)=\begin{cases}\sqrt{2\frac{\phi(x_0)-\phi(x)}{(x-x_0)^2}} & \text{si } x\ne x_0\\ \sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)} & \text{si } x=x_0\end{cases}$.

Toutefois on peut préciser un écriture intégrale de l(x) grace à la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste "intégrale" : $\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^x(x-t)\phi^{(2)}(t)dt$. Le changement de variable affine défini par $u\mapsto t=ux+(1-u)x_0$ donne : $\phi(x)=\phi(x_0)+(x-x_0)^2\int_0^1(1-u)\phi^{(2)}(ux+(1-u)x_0)du$. Soit après simplification par $(x-x_0)^2$ pour $x\ne x_0$: $\boxed{l(x)=\sqrt{-2\int_0^1(1-u)\phi^{(2)}(ux+(1-u)x_0)\,du}}$

La continuité de $\phi^{(2)}$ permet d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale ($(x,u)\mapsto(1-u)\phi^{(2)}(ux+(1-u)x_0)$ est continue sur $[a_1,a_2]\times[0,1]$) et l'expression intégrale de l(x) reste donc valable par continuité en x_0.

10 Question N° 10:

Les remarques de l'énoncé suggèrent de prendre comme nouvelle variable $y = (x - x_0)l(x)$, mais il faut d'abord vérifier que le changement de variable est de classe C^1 et s'exprime sous la forme $x = \varphi(y)$. Introduisons donc les points (x_-, x_+) de la question 9. , et par la relation de Chasles :

$$\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx = \int_{a_1}^{x_-} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}\,dx + \int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx + \int_{x_+}^{a_2} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx$$

Il y a donc trois intégrales à étudier.

1. Etude de l'intégrale $\int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}\,dx$:

   Posons pour $x \in [x_-, x_+]$, $y = \psi(x) = (x - x_0)l(x)$. D'après 9.d on a les deux expressions de $\psi(x)$: (on note $\varepsilon(x)$ le signe de $(x - x_0)$)

   $$\begin{cases} (1) & \psi(x) = \varepsilon(x)\sqrt{2(\phi(x_0) - \phi(x))} \\ (2) & \psi(x) = (x - x_0)\sqrt{-2\int_0^1 (1-u)\phi^{(2)}(ux + (1-u)x_0)du} \end{cases}$$

   D'après l'expression intégrale (2)ci-dessus, l et donc aussi ψ sont de classe C^1 sur $[x_-, x_+]$; en effet le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique ici puisque ϕ est C^4 : $(x, u) \mapsto (1-u)\phi^{(2)}(ux + (1-u)x_0)$ est C^1 et $(x, u) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}((1-u)\phi^{(2)}(ux + (1-u)x_0)) = u(1-u)\phi^{(3)}(ux + (1-u)x_0)$ continue sur $[a_1, a_2] \times [0, 1]$; donc l'intégrale sous la racine est une fonction de classe C^1 sur $[a_1, a_2]$ qui ne s'annule pas sur $[a_1, a_2] \setminus \{x_0\}$ par construction (cf. (i)) ni en x_0 puisque $l(x_0) = \sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)} > 0$. Par conséquent la composition avec la racine carrée conserve la classe C^1 ; on peut même écrire : $l'(x_0) = \frac{-2\int_0^1 u(1-u)\phi^{(3)}(x_0)du}{2\sqrt{-2\int_0^1 (1-u)\phi^{(2)}(x_0)du}} = -\frac{\phi^{(3)}(x_0)}{6\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}}$ et $\psi'(x_0) = l(x_0) = \sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}$.

   En fait le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique une fois de plus car ϕ est C^4 :
   $(x, u) \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2}((1-u)\phi^{(2)}(ux + (1-u)x_0)) = u^2(1-u)\phi^{(4)}(ux + (1-u)x_0)$ est continue sur $[a_1, a_2] \times [0, 1]$; l'intégrale sous la racine est donc une fonction de classe C^2 (ne s'annulant pas) sur $[a_1, a_2]$ et, par composition avec la racine carrée, l puis ψ sont donc C^2 sur l'intervalle $[x_-, x_+]$. Ce résultat est fondamental pour la suite de la question.
   (*On peut vérifier directement la classe C^2 de ψ sur $[x_-, x_+] \setminus \{x_0\}$ à partir de $\psi(x) = \varepsilon(x)\sqrt{2(\phi(x_0) - \phi(x))}$ mais il reste ensuite à établir par des considérations de développements limités sur ϕ en x_0 que ψ est bien C^2 en x_0, ce qui est évité par l'utilisation de l'expression intégrale de l(x).*)
   Montrons maintenant que ψ est un C^1-difféomorphisme de $[x_-, x_+]$ sur $[-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$: On vient de démontrer la classe C^1 de ψ sur $[x_-, x_+]$ et d'après 9.a et l'expression (1) de $\psi(x)$, $\psi(x_-) = -\sqrt{2\alpha_0}$ et $\psi(x_+) = \sqrt{2\alpha_0}$. En dérivant $\psi^2(x)$ à partir de (1) on obtient pour $x \in [x_-, x_+]\setminus\{x_0\}$, $\psi'(x) = -\frac{\phi'(x)}{\psi(x)} > 0$ (car d'après 9.a et (1) ψ et ϕ' ne s'annulent pas et ont des signes contraires sur $[x_-, x_+] \setminus \{x_0\}$) et pour $x = x_0$ on a vu plus haut que $\psi'(x_0) = \sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)} > 0$. Donc ψ est un C^1-difféomorphisme strictement croissant de $[x_-, x_+]$ sur $[-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$. Remarquons que l'étude, faite au 9.a des variations de $x \mapsto \phi(x_0) - \phi(x)$ sur l'intervalle $[x_-, x_+]$ confirme que ψ est strictement croissante.
   On peut dès lors noter $\varphi = \psi^{-1}$ le difféomorphisme réciproque et le changement de variable $x = \varphi(y)$ qu'il définit permet, puisque $dx = \varphi'(y)dy = \frac{1}{\psi' \circ \varphi(y)}dy$, d'écrire :

   $$\int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx = \int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} \frac{a \circ \varphi(y)}{\psi' \circ \varphi(y)} e^{-\frac{k}{2}y^2}dy$$

   De plus nous avons vu ci-dessus que, sur $[x_-, x_+]$, ψ était C^2, que ψ' ne s'annulait pas et par hypothèse a est C^1 , donc $\frac{a}{\psi'}$ est C^1 sur $[x_-, x_+]$. Par composition, puisque φ est aussi C^1 de $[-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$ sur $[x_-, x_+]$, la fonction $\frac{a\circ\varphi}{\psi'\circ\varphi}$ est C^1 sur $[-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$ et par définition de sa dérivabilité en 0, sachant que $\varphi(0) = x_0$, elle s'écrit pour y variant dans l'intervalle $[-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$: $\frac{a\circ\varphi(y)}{\psi'\circ\phi(y)} = \frac{a(x_0)}{\psi'(x_0)} + yr(y)$ où r est un fonction continue sur $[-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$.
   L'intégrale précédente s'écrit donc : $\int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} \left(\frac{a(x_0)}{\psi'(x_0)} + yr(y)\right) e^{-\frac{k}{2}y^2}dy$ et, sachant que $\psi'(x_0) = \sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}$, on a aussi :

   $$\int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx = \frac{a(x_0)}{\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}} \int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} e^{-\frac{k}{2}y^2}dy + \int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} yr(y)e^{-\frac{k}{2}y^2}dy$$

   – Etude de l'intégrale $\frac{a(x_0)}{\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}} \int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} e^{-\frac{k}{2}y^2}dy$:

   Appliquons 8. avec $x_0 = 0$ et $[a_1, a_2] = [-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$ et en remplaçant k par $\frac{k}{2}$ pour obtenir :
   $\frac{a(x_0)}{\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}} \int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} e^{-\frac{k}{2}y^2}dy = \frac{a(x_0)}{\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{k}} + \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{k^q})\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)}} \left(a(x_0) + \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{k^{q-\frac{1}{2}}})\right)$
   Pour $q = 1$ on a bien :

   $$\frac{a(x_0)}{\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}} \int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} e^{-\frac{k}{2}y^2}dy = \sqrt{\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)}} \left(a(x_0) + \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sqrt{k}})\right)$$

– Etude de l'intégrale $\int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}} yr(y)e^{-\frac{k}{2}y^2}dy$:

D'après le résultat admis(*) dans l'énoncé (avec $|r|$ au lieu de r) cette intégrale est dominée par $\frac{1}{k}$ quand $k \to +\infty$; Par addition des deux intégrales étudiées :

$$\int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)}}\left(a(x_0) + \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sqrt{k}})\right)$$

2. Etude des intégrales $\int_{a_1}^{x_-} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx$ et $\int_{x_+}^{a_2} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx$:

La question 9.b montre que $e^{-k\phi(x_0)}\int_{a_1}^{x_-} a(x)e^{k\phi(x)}dx$ et $e^{-k\phi(x_0)}\int_{x_+}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}dx$ sont négligeables devant $\frac{1}{k^M}$ lorsque k tend vers $+\infty$ et donc pour $M = 1$ devant $\frac{1}{k}$.

En additionnant toutes les intégrales précédentes multipliées par le nombre non nul $e^{k\phi(x_0)}$, on a (enfin !) le résultat demandé :

$$\boxed{\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)}}\,e^{k\phi(x_0)}\left(a(x_0) + \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sqrt{k}})\right)}$$

car $R(a,\phi,k) = \sqrt{k}\underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sqrt{k}})$ est bien bornée quand $k \to +\infty$.

* *r continue sur le segment $[-\alpha,\beta]$ est bornée par une constante positive A d'où les majorations :* $\forall k \in \mathbb{R}_+^*,\ |\int_{-\alpha}^{\beta} yr(y)e^{-\frac{k}{2}y^2}dy| \le A\int_{-\alpha}^{\beta}|y|e^{-\frac{k}{2}y^2}dy = A\frac{1}{k}\left(\left[-e^{-\frac{k}{2}y^2}\right]_0^{\beta} + \left[-e^{-\frac{k}{2}y^2}\right]_0^{\alpha}\right) \le \frac{2A}{k}$. *La constante $C = 2A$ convient donc.*

11 Question N° 11:

11.a

L'existence de l'intégrale I_p pour $k > 0$ a été montrée à la question 7.d et une classique intégration par parties où la partie intégrée converge vers 0 donne la relation de récurrence cherchée :

$I_{p+1} = \left[\frac{x^{2p+1}}{(2p+2)!}\frac{(-e^{-k\frac{x^2}{2}})}{k}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2p+1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{(2p+2)!}e^{-k\frac{x^2}{2}}\,dx$. Soit : $I_{p+1} = \frac{1}{2k}\frac{I_p}{p+1}$.

Une récurrence immédiate, sachant d'après 2. que $I_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}$, achève le calcul de I_p : $\boxed{I_p = \frac{1}{(2k)^p(p!)}\sqrt{\frac{2\pi}{k}}}$.

11.b

Remarquons que toutes les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^j}{j!}e^{-k\frac{x^2}{2}}\,dx$ existent d'après 7.d et qu'elles sont nulles pour j impair car ce sont des intégrales convergentes de fonctions impaires sur $[-\infty,+\infty]$. Par linéarité l'intégrale proposée existe bien et il ne reste que les termes d'indice pair ($j = 2p$) où p varie de 0 au plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$, c'est-à-dire $[\frac{n}{2}]$. Compte-tenu du 11.a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}(a_j\frac{x^j}{j!})e^{-k\frac{x^2}{2}}dx = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]}a_{2p}I_p \quad \boxed{= \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\left(\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{a_{2p}}{(2k)^p(p!)}\right)}$$

12 Question N° 12:

La fonction continue $|f|$ admet un maximum M sur le segment $[-A,A]$ d'où la majoration :

$$|\int_{-A}^{A} x^n f(x)e^{-k\frac{x^2}{2}}\,dx| \le M\int_{-A}^{A}|x|^n e^{-k\frac{x^2}{2}}dx \le M\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^n e^{-k\frac{x^2}{2}}dx$$

Si n est pair, $n = 2p$, on reconnait $(2p)!I_p$ et si n est impair, $n = 2p+1$, un calcul similaire à celui du 11.a donne :

$\int_{\mathbb{R}}|x|^{2p+1}e^{-k\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\int_0^{+\infty}x^{2p+1}e^{-k\frac{x^2}{2}}\,dx = 2J_p$ avec $J_p = \left[x^{2p}\frac{(-e^{-k\frac{x^2}{2}})}{k}\right]_0^{+\infty} + \frac{2p}{k}\int_0^{+\infty}x^{2p-1}e^{-k\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2p}{k}J_{p-1}$.

D'où par récurrence immédiate et puisque $J_0 = \int_0^{+\infty}xe^{-k\frac{x^2}{2}}dx = \left[\frac{(-e^{-k\frac{x^2}{2}})}{k}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{k}$,

$$J_p = \frac{p!\,2^p}{k^{p+1}},\ \text{et}\ \int_{\mathbb{R}}|x|^{2p+1}e^{-k\frac{x^2}{2}}dx = \frac{p!\,2^{p+1}}{k^{p+1}}$$

Finalement on a les majorations suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \quad |\int_{-A}^{A} x^n f(x) e^{-k\frac{x^2}{2}}\, dx| \leq \begin{cases} M\sqrt{\frac{2\pi}{k}} \frac{n!}{(2k)^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!} = M\frac{n!\sqrt{2\pi}}{(2)^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!} k^{-\frac{n+1}{2}} & \text{Si n est pair} \\ M(\frac{n-1}{2})!\, 2^{\frac{n+1}{2}} k^{-\frac{n+1}{2}} & \text{Si n est impair} \end{cases}$$

La constante $\boxed{E = M\frac{n!\sqrt{2\pi}}{(2)^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!} \text{ si n est pair et } M(\frac{n-1}{2})!\, 2^{\frac{n+1}{2}} \text{ si n est impair}}$ convient donc.

13 Question N° 13:

La fonction h étant de classe C^n, la formule de Taylor permet d'écrire : $h(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} x^j + x^n f(x)$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\int_{-A}^{A} h(x) e^{-k\frac{x^2}{2}}\, dx$
$= \int_{-A}^{A} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} x^j\right) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-A}^{A} x^n f(x) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx$, puis, compte-tenu de la relation de Chasles et des parités
$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{j=0}^{n} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} x^j) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx - 2\int_{A}^{+\infty} (\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{h^{(2p)}(0)}{(2p!)} x^{2p}) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-A}^{A} x^n f(x) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx$, et compte-tenu du 11.b
$= \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left(\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{h^{(2p)}(0)}{2^p (p!)} k^{-p}\right) - 2\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{h^{(2p)}(0)}{(2p!)} \int_{A}^{+\infty} x^{2p} e^{-k\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-A}^{A} x^n f(x) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx$.

On obtient ainsi $R_n(k, A, h)$ sous la forme :
$R_n(k, A, h) = -2\sqrt{k} \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{h^{(2p)}(0)}{(2p!)} \int_{A}^{+\infty} x^{2p} e^{-k\frac{x^2}{2}} dx + \sqrt{k} \int_{-A}^{A} x^n f(x) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx$.
Mais les résultats du 7.d avec $m = 2p,\ N = n - 2p \geq 0$ et $\frac{k}{2}$ à la place de k montrent l'existence d'une constante $H_p \geq 0$, indépendante de k, telle que :
$\forall k \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq \int_{A}^{+\infty} x^{2p} e^{-k\frac{x^2}{2}} dx \leq \frac{H_p}{k^{\frac{n+1}{2}}}$. D'après 12. on a aussi la majoration :
$|\sqrt{k} \int_{-A}^{A} x^n f(x) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx| \leq E k^{-\frac{n}{2}}$. Finalement par l'inégalité triangulaire on obtient la forme demandée pour la majoration :

$\forall k \in \mathbb{R}_+^*,\ |R_n(k, A, h)| \leq k^{-\frac{n}{2}} \left(2\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{|h^{(2p)}(0)|}{(2p!)} H_p + E\right)$, et la constante $\boxed{E_1 = 2\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{|h^{(2p)}(0)|}{(2p!)} H_p + E}$ convient.

Ce résultat, en prenant $2n+1$ à la place de n, donne le développement en $\frac{1}{k}$ à l'ordre $n + \frac{1}{2}$ quand $k \to +\infty$ de l'intégale puisque $\frac{1}{\sqrt{k}} R_n(k, A, h) = \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{k^{n+1}}) = \underset{k\to+\infty}{o}(\frac{1}{k^{n+\frac{1}{2}}})$. Soit :

$$\boxed{\int_{-A}^{A} h(x) e^{-k\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^{(2p)}(0)}{2^p (p!)} k^{-(p+\frac{1}{2})}\right) + \underset{k\to+\infty}{o}(\frac{1}{k^{n+\frac{1}{2}}})}$$

14 Question N° 14:

14.a

La fonction $x \mapsto x^n e^x$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $n \geq 0$ et $x^n e^x = \underset{k\to+\infty}{o}(\frac{1}{x^2})$ et on reconnait $\Gamma(n+1) = n!$ formule classique obtenue par intégration par parties et par récurrence : $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$. En remarquant que $x^n e^{-x} = e^{n\ln(x) - x}$ et par le changement de variable linéaire $t \mapsto x = nt$, on obtient $\boxed{n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{n\phi_0(t)} dt}$.

14.b

Puisque $\phi_0'(t) = \frac{1}{t} - 1$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction ϕ_0 est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ d'où les inégalités : $\phi_0(t) \leq \phi_0(\frac{1}{2})$ et donc $e^{n\phi_0(t)} \leq e^{n\phi_0(\frac{1}{2})}$ sur $]0, \frac{1}{2}]$ et $n\phi_0(t) \leq (n-1)\phi_0(\frac{3}{2}) + \phi_0(t)$ et donc $e^{n\phi_0(t)} \leq e^{(n-1)\phi_0(\frac{3}{2})} e^{\phi_0(t)}$ sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$. D'après 14.a pour $n = 1$, e^{ϕ_0} est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{\phi_0(t)} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{\phi_0(t)} dt = 1! = 1$. On en déduit par intégration les inégalités demandées :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)} dt \leq \frac{1}{2} e^{n\phi_0(\frac{1}{2})} \text{ et } \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{n\phi_0(t)} dt \leq e^{(n-1)\phi_0(\frac{3}{2})}$$

14.c

D'après 14.a et la relation de Chasles on peut écrire : $n! = n^{n+1}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt + \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{n\phi_0(t)}dt\right)$. Etudions ces trois intégrales :

1. Etude de $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt$: On se trouve dans la situation des questions 9. et 10. puisque la fonction ϕ_0 vérifie les conditions du 9. (fonction de classe C^∞ sur $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$, qui admet in maximum strict (-1) au point $x_0 = 1$ et telle que $\phi_0^{(2)}(x_0) = -1 \neq 0$). On a donc d'après 10. avec $k = n$ et $a = 1$: $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n}(1 + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sqrt{n}}))$.
2. Etude de $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt$: Puisque $\phi_0(\frac{1}{2}) < -1$, alors $e^{n\phi_0(\frac{1}{2})} = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n})$ et la majoration du 14.b prouve que : $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt \leq \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n})$, soit : $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n})$
3. Etude de $\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{n\phi_0(t)}dt$: On a de même $\phi_0(\frac{3}{2}) < -1$ et par suite $e^{(n-1)\phi_0(\frac{3}{2})} = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n})$; la seconde majoration du 14.b prouve donc à nouveau que : $\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{n\phi_0(t)}dt = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n})$

Par addition des trois relations ci-dessus puis par multiplication par n^{n+1} on obtient :
$n! = n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n}(1 + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{\sqrt{n}})) + n^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n})$ et donc

$$\boxed{n! = n^n e^{-n}\left(\sqrt{2n\pi} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(1)\right)}$$

On reconnait ici la formule classique de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$.

15 Question N° 15:

On reconnait ici, au coefficient multiplicatif $\sqrt{2}$ près la fonction ψ introduite dans la résolution de la question 10. et définie ici sur $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ en prenant $\phi = \phi_0,\ x_0 = 1, [a_1, a_2] = [\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$, et l'on a donc (en notant $\varepsilon(x)$ le signe de $(x-1)$:
$\begin{cases}(1) & \psi(x) = \varepsilon(x)\sqrt{(\phi_0(1) - \phi_0(x))} \\ (2) & \psi(x) = (x-1)\sqrt{-\int_0^1 (1-u)\phi_0^{(2)}(ux + (1-u)x_0)du}\end{cases}$.

Sachant que $\phi_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{t^2}$, la formule (2) donne bien l'expression intégrale attendue. On avait dèja vu que ψ était de classe C^2 mais ici le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique à tout ordre car la fonction $(x,t) \mapsto \frac{1-t}{(tx+(1-t))^2}$ est une fraction rationnelle à deux variables donc de classe C^∞ sur $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}] \times [0,1]$ (le dénominateur ne s'annulant que pour $x = 0$ qui n'est pas dans $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$). Donc l'intégrale ci-dessus est une fonction C^∞ sur l'intervalle $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ et de plus comme elle ne s'annule pas sur cet intervalle (cf. 10.) la composition avec la racine carrée et la multiplication par (x-1) conservent la classe C^∞.
Enfin on a également $\psi'(x) = \begin{cases} -\frac{\phi_0'(x)}{2\psi(x)} = \frac{t-1}{2t\psi(t)} > 0 & \text{Si } x \in [\frac{1}{2},\frac{3}{2}] \setminus \{1\} \\ \sqrt{-\frac{\phi_0^{(2)}(1)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{Si } x = 1 \end{cases}$.

Donc ψ est un C^∞-difféomorphisme strictement croissant de l'intervalle $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ sur son image $[(\psi\frac{1}{2}), \psi(\frac{3}{2})] = [-A, B]$ si on pose $A = \sqrt{\ln(2) - \frac{1}{2}}$ et $B = \sqrt{\frac{1}{2} - \ln(\frac{3}{2})}$.

16 Question N° 16:

Dans l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n(\phi_0(t)-\phi_0(1))}dt$ effectuons le changement de variable défini par $t = \Pi(x)$ où Π est le C^∞-difféomorphisme réciproque de ψ et tel que $\phi_0(1) - \phi_0(t) = \psi^2(t)$: $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n(\phi_0(t)-\phi_0(1))}dt = \int_{-A}^{B} \Pi'(x)e^{-nx^2}dx$.

Π' étant C^∞, le résultat du 13. s'applique à tout rang N+2 avec $k = 2n,\ h = \Pi'$:

$$\left|\sqrt{2n}\int_{-A}^{A} \Pi'(x)e^{-nx^2}dx - \sqrt{2\pi}\sum_{p=0}^{[\frac{N+2}{2}]} \frac{\Pi^{(2p+1)}(0)}{2^p(p!)}(2n)^{-p}\right| \leq \sqrt{2}E_1 n^{(-\frac{N+2}{2})}$$

En sortant le terme d'indice $p = [\frac{N+2}{2}]$ de la somme pour le regrouper avec la constante et puisque $[\frac{N}{2}] + 1 = [\frac{N+2}{2}] \leq \frac{N+2}{2}$ on obtient une constante E_1' indépendante de n et telle que :

$$\left|\sqrt{n}\int_{-A}^{A} \Pi'(x)e^{-nx^2}dx - \sqrt{\pi}\sum_{p=0}^{[\frac{N}{2}]} \frac{\Pi^{(2p+1)}(0)}{2^p(p!)}(2n)^{-p}\right| \leq E_1' n^{-[\frac{N}{2}]-1}$$

On a un résultat analogue pour $\sqrt{n}\int_{-B}^{B}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx$ avec une autre constante E_1'' à la place de E_1' ; si on pose $C' = \max(E_1', E_1'')$ qui est indépendant de n, alors la distance de la somme $S_N = \sqrt{\pi}\sum_{p=0}^{[\frac{N}{2}]}\frac{\Pi^{(2p+1)}(0)}{2^p(p!)}(2n)^{-p}$ à chacune des deux expressions $\sqrt{n}\int_{-A}^{A}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx$ et $\sqrt{n}\int_{-B}^{B}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx$ est inférieure à $C'n^{(-[\frac{N}{2}]-1)}$. De plus puisque $\Pi'(x) = \frac{1}{\psi'(\Pi(x))} > 0$ l'intégrale $\sqrt{n}\int_{-A}^{B}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx$ est comprise entre les deux intégrales ci-dessus (plus précisément, puisque $A > B$, $\sqrt{n}\int_{-B}^{B}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx \leq \sqrt{n}\int_{-A}^{A}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx \leq \sqrt{n}\int_{-A}^{A}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx$) donc à une distance de S_N inférieure à $C'n^{(-[\frac{N}{2}]-1)}$ *(On aurait pu aussi montrer par une majoration directe dans l'intégrale $\sqrt{n}\int_{-A}^{B}\Pi'(x)e^{-nx^2}dx$ que celle-ci était négligeable devant tout puissance positive de $\frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$)*. Soit finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sqrt{n}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{-n(\phi_0(1)-\phi_0(t))}dt - \sqrt{\pi}\sum_{p=0}^{[\frac{N}{2}]}\frac{\Pi^{(2p+1)}(0)}{4^p(p!)}n^{-p}\right| \leq C'n^{(-[\frac{N}{2}]-1)}$$

et la suite $\boxed{b_p = \dfrac{\Pi^{(2p+1)}(0)}{4^p(p!)\sqrt{2}}, p \in \mathbb{N}}$ convient.

Les coefficients b_p sont donc connus dès que les nombres $\Pi^{(2p+1)}(0)$ le sont. Il suffit donc "d'inverser" les développements limités en 1 de ψ pour obtenir ceux en 0 de la fonction Π. On peut procéder par substitution dans l'égalité $-1-\phi_0(t) = \psi^2(t) = x^2$ si $t = \Pi(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x^j + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ où d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre $n \geq 2$: $\alpha_j = \frac{\Pi^{(j)}(0)}{j!}$. Le développement limité à l'ordre n au point 1 : $\ln(t) = -1 + t - \ln(t) = \sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^j}{j}(t-1)^j + \underset{t\to 1}{o}((t-1)^n)$, composé avec $t - 1 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x^j + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, sachant que $t - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha_1 x$, avec $\alpha_1 = \Pi'(0) = \frac{1}{\psi'(1)} = \sqrt{2} \neq 0$, on obtient l'égalité

$$x^2 - \sum_{j=2}^{n}\frac{(-1)^j}{j}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x^k\right)^j = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

En écrivant que le premier membre est un polynôme de valuation supérieure strictement à $n = 2p+2$ on obtient un système permettant de déterminer les coefficients $(\alpha_j)_{1\leq j\leq 2p+1}$ et donc les nombres $(b_k = \frac{(2k+1)!\alpha_{2k+1}}{4^k(k!)\sqrt{2}})_{0\leq k\leq p}$ cherchés.

Le cas $n = 4$ donne : $x^2 - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{4}\alpha_k x^k)^2 + \frac{1}{3}(\sum_{k=1}^{4}\alpha_k x^k)^3 - \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{4}\alpha_k x^k)^4 = \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, soit $(1-\frac{\alpha_1^2}{2})x^2 + (\frac{\alpha_1^3}{3} - \alpha_1\alpha_2)x^3 + (\alpha_1^2\alpha_2 - \frac{\alpha_1^4}{4} - \alpha_1\alpha_3 - \frac{\alpha_2^2}{2})x^4$ est le polynôme nul. On trouve ainsi successivement : $\alpha_1 = \sqrt{2}$ car $\alpha_1 > 0$, puis $\alpha_2 = \frac{\alpha_1^2}{3} = \frac{2}{3}$ puis $\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2 - \frac{\alpha_1^3}{4} - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} = \frac{\sqrt{2}}{18}$. D'où : $\boxed{b_0 = 1}$ et $\boxed{b_1 = \dfrac{1}{12}}$.

17 Question N° 17:

On procède comme au 14.c avec $n! = n^{n+1}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt + \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{n\phi_0(t)}dt\right)$. Etudions ces trois intégrales :

1. Etude de $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt$: On se trouve dans la situation de la question 16. avec $\phi_0(1) = -1$ et on choisit $N = 2j+1$: $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt = e^{-n}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\sum_{p=0}^{j}\frac{b_p}{n^p} + r_j(n)$, où $|r_j(n)| \leq C'e^{-n}n^{-j-\frac{3}{2}}$
2. Etude de $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt$: Puisque $\phi_0(\frac{1}{2}) < -1$, alors $e^{n\phi_0(\frac{1}{2})} = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n^{j+\frac{3}{2}}})$ et la majoration du 14.b prouve qu'il existe une constante C_1' indépendante de n telle que : $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt \leq C_1'e^{-n}n^{-j-\frac{3}{2}}$.
3. Etude de $\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{n\phi_0(t)}dt$: On a de même $\phi_0(\frac{3}{2}) < -1$ et par suite $e^{(n-1)\phi_0(\frac{3}{2})} = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{e^{-n}}{n^{j+\frac{3}{2}}})$; la seconde majoration du 14.b prouve donc à nouveau l'existence C_2' indépendante de n et telle que :

$$0 \leq \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} e^{n\phi_0(t)}dt \leq C_2'e^{-n}n^{-j-\frac{3}{2}}$$

Par addition des trois relations ci-dessus puis par multiplication par n^{n+1} on obtient :

$$n! = n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{-n}\left(\sum_{p=0}^{j}\frac{b_p}{n^p} + R_j(n)\right)$$

où, en posant $C'' = \frac{C'+C_1'+C_2'}{\sqrt{2\pi}}$, $|R_j(n)| \leq C''n^{-j-1}$. On reconnait ici la formule de Stirling généralisée avec $b_0 = 1$ et $b_1 = \frac{1}{12}$: $\boxed{n! = \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}e^{-n}(1 + \dfrac{1}{12n} + \sum_{p=2}^{j}\dfrac{b_p}{n^p} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(n^{-j-1})}$.

18 Question N° 18:

Soit $\alpha \in]0,1[$ et considérons l'intégrale du 14. découpée par la relation de Chasles :

$$\frac{e^n}{n^{n+1}}n! = \int_0^{+\infty} e^n e^{n\phi_0(t)}dt = \int_0^{1-\alpha} e^n e^{n\phi_0(t)}dt + \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^n e^{n\phi_0(t)}dt + \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^n e^{n\phi_0(t)}dt$$

En fait des conditions de majoration dans l'intégrale centrale que nous préciserons plus bas nous oblige à considérer non pas un α fixe mais une suite (α_n), que nous choisissons pour l'instant strictement décroissante et de limite nulle et située dans l'intervalle $]0,1[$ à partir du rang 2. Etudions chacune de ces trois intégrales :

1. Etude de $\int_0^{1-\alpha_n} e^n e^{n\phi_0(t)}dt$

   Comme au 14.b on a la majoration : $0 \leq \int_0^{1-\alpha_n} e^n e^{n\phi_0(t)}dt \leq (1-\alpha_n)e^n e^{n\phi_0(1-\alpha_n)} \leq e^{n(\ln(1-\alpha_n)+\alpha_n)}$.
   Mais $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$, et puisque $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$: $n(\ln(1-\alpha_n)+\alpha_n) = -\frac{n\alpha_n^2}{2}(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1))$ et donc si on impose à la suite (α_n) la condition : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n^2 = +\infty}$ alors pour tout nombre positif M : $e^{n(\ln(1-\alpha_n)+\alpha_n)} = \underset{n\to+\infty}{o}((n\alpha_n^2)^{-M})$.
   Cherchons α_n sous la forme $n^{-\beta}$ alors les conditions précédentes équivalent à $\boxed{0 < \beta < \frac{1}{2}}$ et $n \geq 2$ et dans ce cas il suffira de choisir $M = \frac{j+\frac{3}{2}}{1-2\beta}$ pour avoir finalement :

   $$\int_0^{1-\alpha_n} e^n e^{n\phi_0(t)}dt = \underset{n\to+\infty}{o}(n^{-j-1})$$

2. Etude de $\int_{1+\alpha_n}^{+\infty} e^n e^{n\phi_0(t)}dt$

   Comme au 14.b et ci-dessus on obtient :
   $0 \leq \int_{1+\alpha_n}^{+\infty} e^n e^{n\phi_0(t)}dt \leq e^{(n-1)(\ln(1+\alpha_n)-\alpha_n)} \leq e^{-\frac{(n-1)\alpha_n^2}{2}}(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1))$ et donc avec les mêmes conditions sur β et M :

   $$\int_{1+\alpha_n}^{+\infty} e^n e^{n\phi_0(t)} = \underset{n\to+\infty}{o}(n^{-j-1})$$

3. Etude de $\int_{1-\alpha_n}^{1+\alpha_n} e^n e^{n\phi_0(t)}dt$:

   Par un raisonnement similaire à celui du 15., la formule de Taylor avec reste "intégrale" à l'ordre 2 au point 1 appliquée à $\ln(t)$ s'écrit : $\phi_0(t) - \phi_0(1) = \ln(t) - t + 1 = -\frac{(t-1)^2}{2} + (t-1)^3\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(ut+1-u)^3}du$ et si l'on pose $h(t) = \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(ut+1-u)^3}du$, h est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; par application de la formule de Taylor-Young au point 1 pour $\ln(t)$ à l'ordre $N' \geq 3$: $h(t) = \sum_{k=0}^{N'-3}(-1)^k\frac{(t-1)^k}{k+3} + \underset{t\to 1}{o}((t-1)^{N'-3})$ et on note $g(t) = (t-1)^3 h(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{(t-1)^3}{3}$.
   De même pour l'exponentielle en 0 : $e^u = 1 + \sum_{p=1}^N \frac{u^p}{p!} + u^{N+1}h_N(u)$ où h_N est un fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   Par compostion avec $u = ng(t)$ on obtient :

   $$e^n e^{n\phi_0(t)} = e^{-n\frac{(t-1)^2}{2}}e^{ng(t)} = e^{-n\frac{(t-1)^2}{2}}\left(1 + \sum_{p=1}^N \frac{n^p}{p!}(t-1)^{3p}h(t)^p + (n(t-1)^3h(t))^{N+1}h_N(ng(t))\right)$$

   Si l'on veut obtenir un développement limité au point 1 de $e^{ng(t)}$ à l'ordre N', il suffit de prendre $N \geq \frac{N'}{3}$ et nous considérerons ici le cas $N' = 3N$. Il suffit alors, pour $p \geq 1$, de déterminer le développement limité à l'ordre $3N-3p$ au point 1 de $h(t)^p$ qui s'écrit :

   $$h(t)^p = \sum_{k=0}^{3N-3p} \alpha_{k,p}(t-1)^k + (t-1)^{3(N-p)+1}H_{N,p}(t)$$

   où $H_{N,p}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et on remarque qu'il est indépendant de n. D'où : $e^n e^{n\phi_0(t)} =$
   $e^{-n\frac{(t-1)^2}{2}}(1 + \sum_{p=1}^N \frac{n^p}{p!}\sum_{k=3p}^{3N}\alpha_{k-3p,p}(t-1)^k + \sum_{p=1}^N \frac{n^p}{p!}(t-1)^{3N+1}H_{N,p}(t) + (n(t-1)^3h(t))^{N+1}h_N(g(t)))$.
   Posons en suivant l'indication de l'énoncé $T = \sqrt{n}(t-1)$:
   $e^n e^{n\phi_0(t)} = e^{-\frac{T^2}{2}}\left(1 + \sum_{p=1}^N\sum_{k=3p}^{3N}\alpha_{k-3p,p}\frac{T^k}{n^{\frac{k-2p}{2}}p!} + \sum_{p=1}^N \frac{T^{3N+1}}{n^{\frac{3N+1-2p}{2}}p!}H_{N,p}(t) + \frac{T^{3(N+1)}}{n^{\frac{N+1}{2}}}h(t)^{N+1}h_N(ng(t))\right)$
   et regroupons les termes de la première somme en fonction des puissances $q = k-2p$ de $\sqrt{n}$ (q varie de 1 à $3N-2$ puisque $k-2p \geq 3p-2p \geq 1$ et $k-2p \leq 3N-2p \leq 3n-2$, et pour q fixé dans cet intervalle, p varie de 1 à $\min(q, [\frac{3N-q}{2}])$ puisque $p = \frac{k-q}{2} \leq \frac{3N-q}{2}$ et $p \geq 2p-q \Rightarrow p \leq q$; ces deux conditions sur q et p étant visiblement suffisantes pour redonner les deux conditions initiales sur p et k) :

   $$\sum_{p=1}^N\sum_{k=3p}^{3N}\frac{\alpha_{k-3p,p}}{p!}\frac{T^k}{n^{\frac{k-2p}{2}}} = \sum_{q=1}^{3N-2}\frac{1}{n^{\frac{q}{2}}}\sum_{p=1}^{\min(q,[\frac{3N-q}{2}])}\frac{\alpha_{q-p,p}T^{2p+q}}{p!}$$

Considérons le développement obtenu de $e^n e^{n\phi_0(t)}$ comme un développement limité en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ quand $n \to +\infty$ et remarquons que dans les deux dernières sommes le terme significatif (correpondant à la plus petite puissance) est en $\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}}$, ce qui conduit à découper la première somme en deux parties selon que q est inférieur ou non à N et comme $\min(q, [\frac{3N-q}{2}]) = q$ si $q \leq N$ et $[\frac{3N-q}{2}]$ si $q \geq N$, on obtient :

$$e^n e^{n\phi_0(t)} = e^{\frac{-T^2}{2}} \left(1 + \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{q-p,p} T^{2p+q}}{p!} + S_N(n,T) \right)$$

Où $S_N(n,T) = \sum_{q=N+1}^{3N-2} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{[\frac{3N-q}{2}]} \frac{\alpha_{q-p,p} T^{2p+q}}{p!} + \sum_{p=1}^{N} \frac{T^{3N+1}}{n^{\frac{3N+1-2p}{2}} p!} H_{N,p}(t) + \frac{T^{3(N+1)}}{n^{\frac{N+1}{2}}} h(t)^{N+1} h_N(ng(t))$.
Le changement de variable $T = \sqrt{n}(t-1)$ et les développements ci-dessus conduisent à l'égalité :
$\int_{1-\alpha_n}^{1+\alpha_n} e^n e^{n\phi_0(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} e^{\frac{-T^2}{2}} \left(1 + \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{q-p,p} T^{2p+q}}{p!} \right) dT + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} e^{\frac{-T^2}{2}} S_N(n,T) dT$.

– Etude de $\int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} e^{\frac{-T^2}{2}} \left(1 + \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{q-p,p} T^{2p+q}}{p!} \right) dT$: Pour des raisons de parité les termes où q est impair sont nuls et compte-tenu de la relation de Chasles et du 11.b cette intégrale s'écrit :

$$\sqrt{2\pi} \left(1 + \sum_{q=1}^{[\frac{N}{2}]} \frac{1}{n^q} \sum_{p=1}^{2q} \alpha_{2q-p,p} \frac{(2(p+q))!}{p!(p+q)!2^{p+q}} \right) + 2J_N(n)$$

où $J_N(n) = \int_{\alpha_n\sqrt{n}}^{+\infty} e^{\frac{-T^2}{2}} dT + \sum_{q=1}^{[\frac{N}{2}]} \frac{1}{n^q} \sum_{p=1}^{2q} \frac{\alpha_{2q-p,p}}{p!} \int_{\alpha_n\sqrt{n}}^{+\infty} T^{2(p+q)} e^{\frac{-T^2}{2}} dT$.
Or d'après les raisonnements du 7.b, 7.c et 7.d (avec $k = \frac{1}{2},\ m = 2(p+q), A = \alpha_n\sqrt{n}$ et $(N_q \geq \frac{N+1-2q}{1-2\beta} \geq 0)$ à la place de n) il existe des constantesM_0 et $M_{p,q}$ indépendantes de n telles que :
$0 \leq \int_{\alpha_n\sqrt{n}}^{+\infty} e^{\frac{-T^2}{2}} dT \leq \frac{M_0}{(\alpha_n\sqrt{n})^{N_0}}$
$0 \leq \int_{\alpha_n\sqrt{n}}^{+\infty} T^{2(p+q)} e^{\frac{-T^2}{2}} dT \leq \frac{M_{p,q} n^q}{(\alpha_n\sqrt{n})^{N_q}}$, et puisque $\alpha_n\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}-\beta}$ on peut écrire : $J_N(n) = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}})$ et par suite quand $n \to +\infty$:
$\int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} e^{\frac{-T^2}{2}} (1 + \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{q-p,p} T^{2p+q}}{p!}) dT$
$= \sqrt{2\pi}(1 + \sum_{q=1}^{[\frac{N}{2}]} \frac{1}{n^q} \sum_{p=1}^{2q} \alpha_{2q-p,p} \frac{(2(p+q))!}{p!(p+q)!2^{p+q}}) + \mathcal{O}(\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}})$

– Etude de$\int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} e^{\frac{-T^2}{2}} S_N(n,T) dT$: Rappelons que :
$S_N(n,T) = \sum_{q=N+1}^{3N-2} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{[\frac{3N-q}{2}]} \frac{\alpha_{q-p,p} T^{2p+q}}{p!} + \sum_{p=1}^{N} \frac{T^{3N+1}}{n^{\frac{3N+1-2p}{2}} p!} H_{N,p}(t) + \frac{T^{3(N+1)}}{n^{\frac{N+1}{2}}} h(t)^{N+1} h_N(ng(t))$.
On suppose désormais, pour simplifier les écritures, que N est impair. L'intégrale de la première somme se calcule comme précédemment ou se majore en valeur absolue :
$|\sum_{q=N+1}^{3N-2} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{[\frac{3N-q}{2}]} \frac{\alpha_{q-p,p}}{p!} \int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} T^{2p+q} e^{\frac{-T^2}{2}} dT|$ est majorée par
$\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}} \sum_{q=\frac{N+1}{2}}^{3(N-1)} \sum_{p=1}^{[\frac{3N-2q}{2}]} |\alpha_{2q-p,p}| \int_{-\infty}^{+\infty} T^{2(p+q)} e^{\frac{-T^2}{2}} dT$; soit :

$$\int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} \sum_{q=N+1}^{3N-2} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}}} \sum_{p=1}^{[\frac{3N-q}{2}]} \frac{\alpha_{q-p,p}}{p!} T^{2p+q} e^{\frac{-T^2}{2}} dT = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}})$$

Puisque les fonctions continues $|H_{N,p|}$ sont bornées sur le segment $[1-\alpha_2, 1+\alpha_2]$ qui contient le segment $[1-\alpha_n, 1+\alpha_n]$ (par $K_{N,p}$) :
$|\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}} \sum_{p=1}^{N} \int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} \frac{H_{N,p}(1+\frac{T}{\sqrt{n}})}{n^{N-p} p!} T^{3N+1} e^{\frac{-T^2}{2}} dT| \leq \frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}} \sum_{p=1}^{N} \frac{K_{N,p}(t)}{p!} \int_{-\infty}^{+\infty} |T|^{3N+1} e^{\frac{-T^2}{2}} dT$ Soit finalement :

$$\int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} \frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}} \sum_{p=1}^{N} \frac{H_{N,p}(1+\frac{T}{\sqrt{n}})}{n^{N-p} p!} T^{3N+1} e^{\frac{-T^2}{2}} dT = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}})$$

La dernière intégrale s'écrit : $\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}} \int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} h(1+\frac{T}{\sqrt{n}})^{N+1} h_N(ng(1+\frac{T}{\sqrt{n}})) T^{3(N+1)} e^{\frac{-T^2}{2}} dT$.
On sait que h est bornée sur le segment $[1-\alpha_2, 1+\alpha_2]$ qui contient $[1-\alpha_n, 1+\alpha_n]$ (on note K un majorant de $|h|$) et il reste à se préoccuper de $h_N(ng(1+\frac{T}{\sqrt{n}}))$. L'expression intégrale de h(t) vue plus haut donne la majoration :
$\forall t \in [1-\alpha_n, 1+\alpha_n],\ 0 \leq h(t) = \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(ut+1-u)^3} du \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(1-\alpha_n)^3} du = \frac{1}{3(1-\alpha_n)^3}$,d'où
$\forall t \in [1-\alpha_n, 1+\alpha_n],\ |ng(t)| = n|(t-1)^3| h(t) \leq \frac{n\alpha_n^3}{(3(1-\alpha_n)^3)}$.
Il suffit donc de choisir $\boxed{\beta = \frac{1}{3} \text{ soit } \alpha_n = n^{-\frac{1}{3}}}$, suite qui vérifie les conditions imposées plus haut, pour avoir $n|g(1+\frac{T}{\sqrt{n}})| \leq b = \frac{1}{3(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^3}$ dès que $n \geq 2$. Dans ces conditions la fonction continue $|h_N|$ est majorée sur le segment $[-b, b]$

par L indépendant de $n \geq 2$. On peut alors écrire :
$|\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}}\int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} h(1+\frac{T}{\sqrt{n}})^{N+1}h_N(ng(1+\frac{T}{\sqrt{n}}))T^{3(N+1)}e^{\frac{-T^2}{2}}dT| \leq \frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}}K^{N+1}L\int_{-\infty}^{+\infty}T^{3(N+1)}e^{\frac{-T^2}{2}}dT.$
Et encore une fois on a la majoration :

$$\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}}\int_{-\alpha_n\sqrt{n}}^{\alpha_n\sqrt{n}} h(1+\frac{T}{\sqrt{n}})^{N+1}h_N(ng(1+\frac{T}{\sqrt{n}}))T^{3(N+1)}e^{\frac{-T^2}{2}}dT = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(\frac{1}{n^{\frac{N+1}{2}}})$$

Finalement si on choisit $N = 2j+1$ on a obtenu, par addition des trois intégrales que l'on vient d'étudier et division par $\sqrt{n}$:

$$\int_{1-\alpha_n}^{1+\alpha_n} e^n e^{n\phi_0(t)}dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1+\sum_{q=1}^{j}\frac{1}{n^q}\sum_{p=1}^{2q}\alpha_{2q-p,p}\frac{(2(p+q))!}{p!(p+q)!2^{p+q}} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(n^{-j-1})\right)$$

Par addition des intégrales étudiées en (1), (2)et (3) puis multiplication par $n^{n+1}e^{-n}$, on obtient (enfin !) l'égalité cherchée :

$$\boxed{n! = n^{n+1}e^{-n}\int_0^{+\infty} e^n e^{n\phi_0(t)}dt = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\sum_{q=1}^{j}\frac{1}{n^q}\sum_{p=1}^{2q}\alpha_{2q-p,p}\frac{(2(p+q))!}{p!(p+q)!2^{p+q}} + \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(n^{-j-1})\right)}$$

On retrouve bien le résultat du 17. avec $\boxed{\forall q;\ 1\leq q\leq j:\ b_q = \sum_{p=1}^{2q}\alpha_{2q-p,p}\frac{(2(p+q))!}{(p+q)!p!2^{p+q}}}$.

On retrouve bien la valeur de $b_1 = 3\alpha_{1,1} + \frac{15}{2}\alpha_{0,2} = \frac{1}{12}$*, puisqu'on vérifie par leur définition que* $\alpha_{1,1} = -\frac{1}{4}$ *et* $\alpha_{0,2} = \frac{1}{9}$.

19 Question N° 19:

Il suffit de reprendre la démarche du 10. avec le même découpage de l'intégrale

$$\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx = \int_{a_1}^{x_-} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx + \int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dxint_{x_+}^{a_2} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx$$

1. Etude de l'intégrale $\int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}\,dx$:

D'après 10. ψ est un C^2-difféomorphisme strictement croissant de $[x_-, x_+]$ sur $[-\sqrt{2\alpha_0}, \sqrt{2\alpha_0}]$, mais d'après l'expression "intégrale" : $\psi(x) = (x-x_0)\sqrt{-2\int_0^1(1-u)\phi^{(2)}(ux+(1-u)x_0)du}$ et l'hypothèse ici que ϕ est de classe C^{2n+3} sur $[a_1, a_2]$, le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique à l'ordre $2n+1$: $(x,u)\mapsto(1-u)\phi^{(2)}(ux+(1-u)x_0)$ est C^{2n+1} et $\forall j\in[0,2n+1]$, $(x,u)\mapsto\frac{\partial^j}{\partial x^j}((1-u)\phi^{(2)}(ux+(1-u)x_0)) = u^j(1-u)\phi^{(j+2)}(ux+(1-u)x_0)$ continue sur $[a_1,a_2]\times[0,1]$; donc l'intégrale sous la racine est une fonction de classe C^{2n+1} sur $[a_1,a_2]$ qui ne s'annule pas sur $[a_1,a_2]$ (cf. 10.). La composition avec la racine carrée et la multiplication conservent la classe C^{2n+1} qui est donc celle de ψ sur $[x_-,x_+]$. $\varphi = \psi^{-1}$ étant le difféomorphisme réciproque, le changement de variable $x = \varphi(y)$ qu'il définit permet, puisque $dx = \varphi'(y)dy = \frac{1}{\psi'\circ\varphi(y)}dy$, d'écrire :

$$\int_{x_-}^{x_+} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx = \int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}}\frac{a\circ\varphi(y)}{\psi'\circ\varphi(y)}e^{-\frac{k}{2}y^2}dy$$

Or sur $[x_-,x_+]$, ψ' ne s'annule pas et est de classe C^{2n} comme a par hypothèse, donc $\frac{a}{\psi'}$ est C^{2n} sur $[x_-,x_+]$. Par composition, puisque φ est C^{2n+1} de $[-\sqrt{2\alpha_0},\sqrt{2\alpha_0}]$ sur $[x_-,x_+]$, la fonction $h = \frac{a\circ\varphi}{\psi'\circ\varphi}$ est C^{2n} sur $[-\sqrt{2\alpha_0},\sqrt{2\alpha_0}]$. On peut donc appliquer 13. avec $A = \sqrt{2\alpha_0}$ et écrire :

$$\sqrt{k}\int_{-\sqrt{2\alpha_0}}^{\sqrt{2\alpha_0}}\frac{a\circ\varphi(y)}{\psi'\circ\varphi(y)}e^{-\frac{k}{2}y^2}dy = \sqrt{2\pi}\sum_{p=0}^{n}\frac{h^{(2p)}(0)}{2^p(p!)}k^{-p} + r_n(k,A,h),\ \text{où}\ \forall k\in\mathbb{R}_+^*,\ |r_n(k,A,h)|\leq E_1k^{-n}$$

2. Etude des intégrales $\int_{a_1}^{x_-} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx$ et $\int_{x_+}^{a_2} a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx$:

Le résultat du 9.b est encore valable avec $M = n+\frac{1}{2}$ et montre que ce deux intégrales sont négligeables devant $\frac{1}{k^{n+\frac{1}{2}}}$ lorsque k tend vers $+\infty$. Or $(k,x)\mapsto k^{n+\frac{1}{2}}a(x)e^{k(\phi(x)-k\phi(x_0))}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[a_1,a_2]$ et par théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction $k\mapsto k^{n+\frac{1}{2}}(\int_{a_1}^{x_-}a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx+\int_{x_+}^{a_2}a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et comme on vient de montrer qu'elle est de limite nulle quand $k\to+\infty$, elle est bornée par E_2 sur l'intervalle $[1,+\infty]$, soit : $|\int_{a_1}^{x_-}a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}\,dx + \int_{x_+}^{a_2}a(x)e^{k(\phi(x)-\phi(x_0))}dx| = |r'_n| \leq \frac{E_2}{k^{n+\frac{1}{2}}}$

L'addition de toutes les intégrales précédentes multipliées par le nombre $e^{k\phi(x_0)>0}$, donne :
$\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}e^{k\phi(x_0)}\left(\sum_{p=0}^{n}\frac{h^{(2p)}(0)}{2^p(p!)}k^{-p}+\frac{r_n(k,A,h)+r'_n\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}}\right)$; mais comme$h(0)=\frac{a(x_0)}{\phi'(x_0)}=\frac{a(x_0)}{\sqrt{-\phi''(x_0)}}$; en "sortant " le premier terme (pour p=0) et le dernier (p=n) de la somme indéxée par p et en factorisant par $\frac{1}{\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}}$ on obtient :
$\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)}}\ e^{k\phi(x_0)}\left(a(x_0)+\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}\left[\sum_{p=1}^{n-1}\frac{h^{(2p)}(0)}{2^p(p!)}k^{-p}+\frac{r_n(k,A,h)+r'_n\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}}\right]\right)$. Soit :

$$\boxed{\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)}}\ e^{k\phi(x_0)}\left(a(x_0)+\sum_{p=1}^{n-1}\frac{b_p(a,\phi,x_0)}{p!k^p}+k^{-n}R_n(a,\phi,k)\right)}$$

où

$$\boxed{b_p(a,\phi,x_0)=\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}\frac{h^{(2p)}(0)}{2^p}}$$

et $|R_n(a,\phi,k)| = \sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}\left|\frac{h^{(2p)}(0)}{2^p}+k^n\frac{r_n(k,A,h)+r'_n\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}}\right|$ est bien majoré (par $\sqrt{-\phi^{(2)}(x_0)}\left(|\frac{h^{(2p)}(0)}{2^p}|+\frac{E_1+E_2}{\sqrt{2\pi}}\right)$) quand $k\to+\infty$.

****