ICARE I - 1999
$\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$

I. 1. f est définie en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln(1+t^2)}$ converge.

Ot $t \xrightarrow{\varphi} \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, φ est continue sur $\underset{\leftrightarrows}{[x, 2x]}$.

Donc l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \dfrac{dt}{\ln(1+t^2)} \overset{u=-t}{=} \int_x^{2x} \dfrac{-du}{\ln(1+u^2)} = -f(x)$

D'où, f est impaire.

2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = g(2x) - g(x)$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = 2g'(2x) - g'(x)$

$$= \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

Comme f est impaire, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2}{\ln(1+4x^2)} - \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$.

3. Étudions le signe de la dérivée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\ln(1+4x^2)} \geq \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$

$\Leftrightarrow 2\ln(1+x^2) \geq \ln(1+4x^2)$ (nombres strictement positifs)

$\Leftrightarrow (1+x^2)^2 \geq 1+4x^2$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$

D'où le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

L'on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln(1+4x^2)} \leq \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln(1+t^2)} \leq \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln(1+x^2)}$

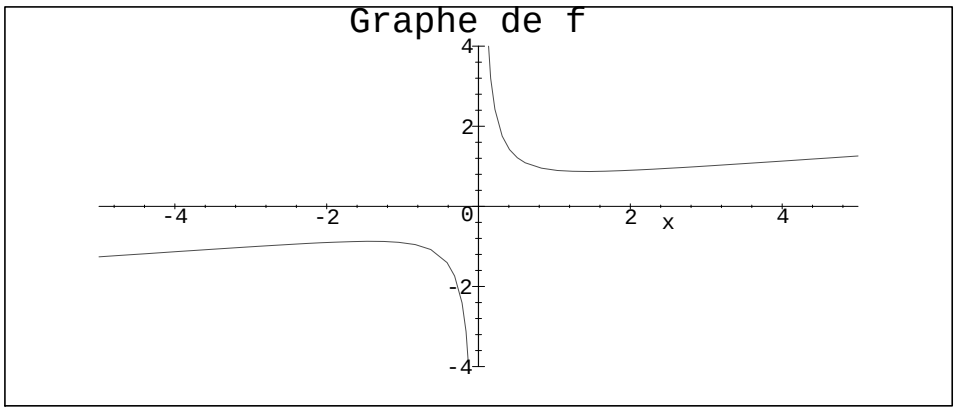
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln(1+t^2)} \leq \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$. Or $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{4x}$ et $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2\ln x}$

Ceci montre $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

4. Tableau de quelques valeurs approchées :

x	0.5	1.414	4
$f(x)$	1.2	0.9	1.1

On a $0 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et la branche infinie est une branche parabolique de direction asymptotique (Ox). D'où le graphe de f :



II. 1. f, fonction rationnelle, est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

L'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(0)}(x) = \dfrac{P_0(x)}{(1+x^2)^{0+1/4}}$ avec $P_0 = 1$. D'où $P_0 \in \mathbb{R}[X]$, $d^\circ P_0 = 0$.

Supposons qu'au rang n, on ait $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/4}}$ avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$, $d^\circ P_n = n$.

Montrons la propriété au rang $n+1$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(1+x^2)^{n+1/4}P_n'(x) - P_n(x) \times \left(n+\frac{1}{4}\right) \times 2x \times (1+x^2)^{n-3/4}}{(1+x^2)^{2n+1/2}}$

$$= \frac{(1+x^2)P_n'(x) - P_n(x) \times \left(n+\frac{1}{4}\right) \times 2x}{(1+x^2)^{(n+1)+1/4}}$$

$$= \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{(n+1)+1/4}}$$

avec $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - P_n \times \left(n+\frac{1}{4}\right) \times 2X$. Donc $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Appelons α_n le coefficient dominant de P_n et α_{n+1} le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1}.

On a $\alpha_{n+1} = n\alpha_n - \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\alpha_n$

$= -\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\alpha_n \neq 0$ puisque $\alpha_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'où $d^\circ P_{n+1} = n+1$.

L'on a montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ vérifiant } d^\circ P_n = n \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/4}}}$$

2.a. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{1}{4} \times 2x \times (1+x^2)^{-5/4}$

$= -\dfrac{x}{2(1+x^2)}f(x)$. D'où f est solution de :

$$\boxed{(1+x^2)y' + \frac{x}{2}y = 0}$$

b. Dérivons la formule précédente n fois à l'aide de la formule de Leibniz :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(C_n^0 f^{(n+1)}(x)(1+x^2) + C_n^1 f^{(n)}(x) \times 2x + C_n^2 f^{(n-1)}(x) \times 2\right) + \left(C_n^0 f^{(n)}(x)\dfrac{x}{2} + C_n^1 f^{(n-1)}(x) \times \dfrac{1}{2}\right) =$
0

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1/4}} + \dfrac{2nxP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/4}} + \dfrac{n(n-1)P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n-1+1/4}} + \dfrac{xP_n(x)}{2(1+x^2)^{n+1/4}} + \dfrac{nP_{n-1}(x)}{2(1+x^2)^{n-1+1/4}} =$
0

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1/4}} + \frac{\left(2n+\frac{1}{2}\right) xP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/4}} + \frac{n\left(n-\frac{1}{2}\right) P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n-1+1/4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) + \left(2n+\frac{1}{2}\right) xP_n(x) + n\left(n-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)\, P_{n-1}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_{n+1}(X) + \left(2n+\frac{1}{2}\right) XP_n(X) + n\left(n-\frac{1}{2}\right)(1+X^2)\, P_{n-1}(X) = 0}$$

(car un polynôme ayant une infinité de racines est nul)

c. L'on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - P_n \times \left(n+\frac{1}{4}\right) \times 2X$.
Par comparaison avec la formule démontrée en 2.b., on obtient :
$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+X^2)P_n'(X) = -n\left(n-\frac{1}{2}\right)(1+X^2)\, P_{n-1}(X) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n'(X) = -n\left(n-\frac{1}{2}\right) P_{n-1}(X)}$$

3. P_0 possède 0 racine.

Supposons que au rang n, P_n possède n racines distinctes a_1, a_2, ..., a_n vérifiant $a_1 < a_2 < ..... < a_n$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+5/4}}$.

En outre, pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$, $f^{(n)}$ est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$; .de plus $f^{(n)}(a_k) = f^{(n)}(a_{k+1}) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, $\exists b_k \in\ ]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(x) = 0 \Leftrightarrow P_{n+1}(b_k) = 0$.

En outre, $f^{(n)}$ est continue sur $]-\infty, a_1]$ et dérivable sur $]-\infty, a_1[$; .de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a_1) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle généralisé, $\exists b_0 \in\ ]-\infty, a_1[$ tel que $f^{(n+1)}(b_0) = 0 \Leftrightarrow P_{n+1}(b_0) = 0$.

De même, en appliquant le théorème de Rolle généralisé sur $[a_n, +\infty[$, on obtient qu'il existe $b_n \in\ ]a_n, +\infty[$ tel que $P_{n+1}(b_n) = 0$.

D'où on a montré que P_{n+1} possède $n+1$ racines distinctes : b_0, ..., b_n et donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ possède n racines distinctes.}}$$

III1.a. $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $S_n - S_{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$

$$= \sqrt{n}\left(-2 + \frac{1}{n} + 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

$$= \sqrt{n}\left(-2 + \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \sqrt{n}\left(-\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

D'où :

$$\boxed{S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^{3/2}}}$$

b. La série $\sum\limits_{n\geq 2}(S_n - S_{n-1})$ est convergente puisque $S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n^{3/2}} = \dfrac{k}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.
Cela signifie que la suite de ses sommes partielles $(S_n - S_1)$ est convergente, donc que :

$$\boxed{(S_n) \text{ est convergente}}$$

2. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = C \in \mathbb{R}$.

On a alors : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right) - 2\sqrt{n} = C + o(1) \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 2\sqrt{n} + C + o(1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$$

3. Posons $a_n = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right)}{1+2+...+n}$; on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}}{\frac{n(n+1)}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^{3/2}}$. Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} a_n \text{ converge}}$.

Posons $b_n = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right)}{n^{\alpha}}$; on a $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}}{n^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^{\alpha-1/2}}$. Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} b_n \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{2}}$.

4. Posons $c_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right)^{-3}$; on a $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (2\sqrt{n})^{-3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{-3/2}}{8}$. D'où $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et d'après la règle de d'Alembert,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} c_n x^n \text{ a pour rayon de convergenece } 1}$$

5. $\sum\limits_{n\geq 1} c_n (-1)^n$ est une série alternée.

La suite $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right)_{n\geq 1}$ est croissante; donc la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Comme $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{-3/2}}{8}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

D'après le critère de convergence des séries alternées, $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} c_n (-1)^n \text{ est une série convergente.}}$

$\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty\infty$

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, allée Chaptal, 22000 St Brieuc
Tel. 02 96 63 94 14
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr

à l'aide de Scientific Workplace