

99 MATH. II - PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

FILIERE PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E. N. T. P. E..

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II- PSI.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit S l'ensemble des fonctions complexes définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables et à décroissance rapide à l'infini. C'est-à-dire : toute fonction f de l'espace S est de classe C^∞ et, pour tout couple d'entiers naturels p et q et toute fonction f de l'espace S , le produit de la fonction puissance $x \mapsto x^p$ et de la dérivée d'ordre q , notée $f^{(q)}$, tend vers 0 à l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p \cdot f^{(q)}(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^p \cdot f^{(q)}(x) = 0 .$$

Les conventions $f^{(0)} = f$, $f' = f^{(1)}$ sont utilisées. Il est admis que l'ensemble S est un espace vectoriel complexe.

Première partie

I-1°) Fonction ω :

Soit ω la fonction définie par la relation : $\omega(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2)$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , la dérivée d'ordre n de la fonction ω , $\omega^{(n)}$, est le produit de la fonction ω et d'une fonction polynôme P_n de degré n :

$$\text{pour tout réel } x, \omega^{(n)}(x) = P_n(x) \cdot \omega(x).$$

En déduire que la fonction ω appartient à l'espace vectoriel S .

I-2°) Propriétés de l'espace vectoriel S :

Démontrer les propriétés suivantes :

TOURNEZ LA PAGE S'IL VOUS PLAÎT

- a. Si la fonction f appartient à S , la fonction dérivée f' appartient aussi à S .
- b. Soient f une fonction de l'espace S et P une fonction polynôme complexe ; la fonction $P.f : x \mapsto P(x).f(x)$ appartient à l'espace S .
- c. Si f et g sont deux fonctions de l'espace S , la fonction $f.g : x \mapsto f(x).g(x)$ appartient à l'espace S .
- d. Toute fonction f de l'espace S est intégrable sur la droite réelle $\mathbb{R}$.
- e. A tout couple de fonctions f et g appartenant à l'espace S , peut être associé le nombre complexe :
$$(f | g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}.g(x) dx .$$

Il est admis que l'espace $(S, (|))$ est un espace préhilbertien complexe.

I-3°) Dimension de l'espace vectoriel S :

Étant donné un entier naturel k quelconque, soit ω_k la fonction translatée de la fonction ω de la quantité k : pour tout réel x , $\omega_k(x) = \omega(x - k)$.

- a. Démontrer que les fonctions ω_k , $k \in \mathbb{N}$, appartiennent à l'espace S .
- b. Est-ce que la famille $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est libre ? Quelle conclusion en tirer sur la dimension de l'espace vectoriel S ?

I-4°) Polynômes H_n :

Puisqu'à la question I-1°, il a été démontré que la dérivée d'ordre n de la fonction ω est égale au produit d'une fonction polynôme, de degré n , et de la fonction ω , par définition le polynôme H_n est défini par la relation :

$$(I) \quad \text{pour tout réel } x, \omega^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x).\omega(x).$$

- a. Calculer les polynômes : H_0, H_1, H_2 et H_3 .
- b. Déterminer l'équation différentielle (Ω) linéaire et homogène du premier ordre vérifiée par la fonction ω dont le coefficient de la dérivée est égal à 1. En dérivant n -fois cette équation ($n \geq 1$), établir, pour tout entier n strictement positif, une relation de récurrence linéaire (R) entre les polynômes H_{n+1}, H_n et H_{n-1} .
- c. Quel est le degré du polynôme H_n ? Déterminer, pour tout entier naturel n , le coefficient a_n du terme de plus haut degré du polynôme H_n .
- d. Établir, par dérivation de la relation (I) définissant les polynômes H_n , une relation (S) entre les polynômes H_{n+1}, H_n et H'_n ; H'_n est le polynôme dérivée de H_n .
Déduire des relations (R) et (S) une relation entre les polynômes H'_n et H_{n-1} .

I-5°) Racines du polynôme H_n lorsque l'entier n est strictement positif :

- a. Soit n un entier, supposé supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), tel que le polynôme H_n admette n racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rangées dans l'ordre croissant.
Quelle est la factorisation du polynôme H_n sur $\mathbb{R}$?
Démontrer que le polynôme H'_n admet $n-1$ racines $\beta_k, k=1, 2, \dots, n-1$ qui vérifient les inégalités $\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1}, k=1, 2, \dots, n-1$. Quelle est la factorisation du polynôme H'_n sur $\mathbb{R}$?
Calculer à l'aide des α_k et des β_k la valeur prise par le polynôme H_{n+1} au point $\alpha_k, k=1, 2, \dots, n$.
Quel est le signe de $H_{n+1}(\alpha_1)$? Quel est plus généralement celui de $H_{n+1}(\alpha_k) (2 \leq k \leq n)$? En déduire que le polynôme H_{n+1} admet $n-1$ racines $\gamma_k, k=1, 2, \dots, n-1$ qui vérifient les inégalités $\alpha_k < \gamma_k < \alpha_{k+1}, k=1, 2, \dots, n-1$.
Montrer l'existence de deux autres racines γ_0 et γ_n ; les placer. Conclure.
- b. Démontrer que, pour tout entier n strictement positif, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes.

Seconde partie

Le but de cette partie est de définir dans cet espace S la transformation de Fourier F et de mettre en évidence des valeurs propres et vecteur propres de cette transformation.

II-1°) Transformation de Fourier dans S :

Soit f une fonction de l'espace S ; soit $F(f)$ la fonction définie par la relation :

$$\text{pour tout réel } \lambda, \quad F(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx .$$

- a. Démontrer que la fonction $F(f)$ est définie, continue et bornée sur toute la droite réelle. La fonction $F(f)$ est dite transformée de Fourier de f .
- b. Démontrer que la fonction $F(f) : \lambda \mapsto F(f)(\lambda)$ est dérivable. Exprimer sa dérivée $F(f)'$ à l'aide de la transformée de Fourier d'une fonction de S . En déduire que, pour toute fonction f de S , la transformée de Fourier $F(f)$ de f est indéfiniment dérivable. Exprimer la dérivée d'ordre n comme transformée de Fourier d'une fonction de S .
Une convention d'écriture : écrire $F[x^p.f(x)]$ pour la transformée de Fourier de la fonction $g : x \mapsto x^p.f(x)$. C'est-à-dire : $F[x^p.f(x)] = F(g)(\lambda)$.
- c. Démontrer que la transformée de Fourier de la fonction dérivée f' s'exprime de manière simple au moyen de la transformée de Fourier de la fonction f . Généraliser le résultat à la transformée de Fourier de la dérivée d'ordre q : $f^{(q)}$.

- d. Étant donnés deux entiers naturels p et q , soit g la fonction : $\lambda \mapsto \lambda^p \cdot \frac{d^q}{d\lambda^q} F(f)(\lambda)$.
Déterminer une fonction h dont la fonction g est la transformée de Fourier ; $g = F(h)$.
En déduire : la fonction $F(f)$ appartient à l'espace S , l'application $F : f \mapsto F(f)$, est un endomorphisme de S .

Étant donné un entier naturel n quelconque, soit φ_n la fonction définie sur toute la droite réelle par la relation :
$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Les fonctions H_n sont les fonctions polynômes définies à la question I-4. Pour mener à leur terme les calculs des questions II-2 et II-3, le résultat $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ est admis.

II-2°) Orthogonalité des fonctions φ_n :

Soient p et q deux entiers naturels tels que p soit inférieur ou égal à q ($p \leq q$). Calculer le produit scalaire $(\varphi_p | \varphi_q)$ défini à la question I-2.e.

II-3°) Transformée de Fourier de la fonction φ_n :

- a. Démontrer que la fonction φ_0 vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (Φ). Démontrer que la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_0$ de la fonction φ_0 existe, appartient à l'espace S et vérifie une équation différentielle simple. En déduire la fonction $\hat{\varphi}_0$.
- b. Démontrer que la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_n$ de la fonction φ_n est le produit de la fonction φ_0 et d'un polynôme Q_n :
$$\hat{\varphi}_n(x) = \varphi_0(x) Q_n(x).$$
- c. Démontrer que les fonctions φ_n , $n \in \mathbb{N}$, vérifient, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation :
$$\varphi_{n+1}(x) = -2 \varphi'_n(x) + 2n \varphi_{n-1}(x).$$
- d. Quelles sont les transformées de Fourier $\hat{\varphi}_0$, $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$ des fonctions φ_0 , φ_1 et φ_2 ? Les exprimer à l'aide des polynômes H_0 , H_1 et H_2 et de la fonction φ_0 .
Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), une relation de récurrence entre les polynômes Q_{n+1} , Q_n et Q_{n-1} . En déduire la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_n$ de la fonction φ_n .
Que dire des valeurs propres de l'endomorphisme F ?

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE