(version jeudi 26 avril 2001 : 18h44) Lundi 17 MAI 1999 Lycée Carnot Dijon 08h30-14h30

(Solution FEVRIER (Pasteur Neuilly -VIDIANI Carnot DIJON : I et II et à partir de III a tapé la solution manuscrite de Fevrier : travail non négligeable pour la bourse = 11h23 (9h46 de frappe + 1h04 correction + 33' correction du source ceci pour 7,5 pages TEX)

NOTE SUR le contrôle et la bourse : Participant au contrôle à postériori depuis sa création, pour trois problèmes chaque année et à la bourse d'échange TEX depuis sa création, sur ma suggestion et incitation en 1993, trouvant anormal que les corrigés faits pour le contrôle, aient une diffusion quasi confidentielle, alors qu'il pouvaient profiter à tout le monde favoriser les échanges et inciter au travail en commun véritable et constructif, je remarque que depuis cette année la répartition n'a pas suivi les demandes faites par les volontaires : (Il devrait être conseillé au collègue qui se charge de la répartition, dans le cas où il ne peut satisfaire les choix demandés, de prendre son téléphone ou d'envoyer un message par courrier électronique, pour voir si le volontaire accepte un autre choix et un autre nombre, quand sa demande est modifiée ; en effet ce n'est pas la même chose de s'engager à contrôler et faire des problèmes standards (Mines, Centrale, CCP, E3A etc) et de plus associé à un collègue, que de faire un problème d'ENS ou ENSAE de plus seul ! En effet vu la difficulté, l'originalité de ces problèmes et leur longueur il est tout a fait normal que le collègue qui CHOISIT de controler un tel problème, ne s'engage que pour UN seul ; Il est d'autre part anormal que certains collègues de grands lycée parisiens, sûrs d'eux mêmes et dominateurs, qui ont dans leur classe prestigieuse, 20 élèves présentant cette catégorie de concours, ne participent pas au contrôle et à la bourse, pour cette sorte de problème, dont ils sont d'ailleurs les premiers bénéficiaires !

Note sur le problème

Manque de progressivité : dès le début des questions barrages : inégalité de gauche dans (1.b), question (1.d) (2.b.i) ; L'énoncé manque d'un fil directeur synthétique : but de problème et objet précis de chaque partie ; les sujets des Mines et de l'X sont mieux structurés eux ! (pour parler comme MA) ; Au début de la seconde partie, l'énoncé devrait préciser que $n \geq 2$, sinon la matrice serait nulle ; ⚠ *Il est tout de même curieux que l'exercice 309 de la RMS 6 de février 99 de l'année 1998-1999, page 819 (exercice ENS) soit exactement la partie VI de ce problème, et il est choquant que l'auteur du problème est ainsi dévoilé par avance une partie de son sujet ! D'autant que cet exercice éloilé est signalé particulièrement à l'attention des lecteurs, pour avoir sa solution publiée dans le numéro final de mai-juin 99 !*

Titre proposé : **Étude des extrema de** $| < \mathbf{x}, \mathbf{Tx} > |$.

BIB SPM 2 p 111-112. Oral 309 de 1998, TMS 6 février 1999 page 819, étoilé (donc cherché par les lecteurs avant le concours) corrigé dans la RMS de juin 99...

nom :

spé MP1 carnot DIJON

Première Partie

1.a) w(T) quand T est hermitien : T, hermitien, admet une base propre orthonormée et a ses valeurs propres réelles, que nous ordonnons, dans l'ordre croissant au sens large de leur valeurs absolues $|t_1| \leq .... \leq |t_n|$.

Sur une telle base $| < x, Tx > | = |t_1 x_1^2 + .. + t_n x_n^2| \leq |t_n|(x_1^2 + ...x_n^2) = |t_n| \ ||x||^2$. L'égalité étant atteinte pour $x = v_n$, on a Si T est hermitien : $\mathbf{w(T) = ||T|| = Max}$(**valeur absolue des valeurs propres de T**

1.b) Encadrer w(T)

□ D'après l'encadrement du produit scalaire (ce qui n'est autre que l'inégalité de SCHWARTZ), on a : $| < x, Tx > \leq ||x|| \ ||T(x)|| \leq ||x||||T||||x|| = ||T|| \ ||x||^2$, d'où l'inégalité de droite.

On écrit $T = H + iK$ avec H et K hermitiens. D'après (1.a) $||H|| = w(H)$ et $||K|| = w(K)$.

On a $< Tx, x > = < Hx, x > + i < Kx, x >$; De plus grace au théorème spectral, *(voir par exemple Dieudonné I)* pour les endomorphismes hermitiens $< Hx, x >$ et $< Kx, x >$ sont RÉELS, par conséquent

$$\begin{cases} | < Tx, x > | \geq |Re(< Tx, x >)| = | < Hx, x > | \\ | < Tx, x > | \geq |Im(< Tx, x >)| = | < Kx, x > | \end{cases}$$

Par passage au sup, sur la sphère unité on a $w(T) \geq ||H||$ et $w(T) \geq ||K||$ et comme $T = H + iK$ on a $||T|| \leq ||H|| + ||K|| \leq 2w(T)$.

L'exemple de la question ultérieure (2.a) montrer que l'encadrement obtenu est le meilleur possible.

1.c) I-zT est inversible : Le résultat est évident pour z=0 ; Si z non nul était tel que I-zT ne soit pas inversible, $t = \frac{1}{z}$ serait une valeur propre, et pour x vecteur t-propre, on aurait $|w(x)| = sup_{||x||=1} \ (|t| \ ||x||^2) = |t| > 1$, d'où la contradiction et le résultat.

1.d) Formule à démontrer : Suivons les étapes indiquées par l'énoncé :

Posons $f(x) = | < x, Tx > |$; f est une fonction continue sur le compact $B(1) = \{x, ||x|| = 1\}$. Son maximum r=w(T), est donc atteint en un point x_0 de B(1). Le nombre complexe $z =< x, Tx >= \rho e^{i\varphi}$, avec $0 \leq \rho \leq r$.

Si l'on pose $g(x, \theta) = |Re(e^{i\theta} < x, Tx > | = \rho|\cos(\varphi + \theta)| \leq r$, g est encore une fonction continue sur le compact $B(1) \times [0, 2\pi]$. Son maximum r est atteint pour le vecteur $x_0 e^{-i\varphi_0}$, avec $< x_0, Tx_0 >= re^{i\varphi_0}$.

Les deux sup, coïncident, d'où le résultat de l'indication.

Comme $Re(e^{i\theta}z) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}z + e^{-i\theta}\overline{z}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} < x, Tx > +e^{-i\theta} < x, T^*x >) =< x, \frac{1}{2}(e^{i\theta}T + e^{-i\theta}T^*)x >$, on a le résultat annoncé d'après la définition de la norme d'une application linéaire (en l'occurence $u \mapsto \frac{1}{2}(e^{i\theta}T + e^{-i\theta}T^*)x$.

(ce n'est pas fulgurant, mais l'énoncé n'avait qu'à être plus génial)

2.a) Calculer ||T|| et w(T) : Avec des notations évidentes : $|T(x)| = |x_1| \leq 1$ pour $|x_1|^2 + |x_2|^2 = ||x||^2 = 1$, 1 est atteint pour e_1 donc $\boxed{||\mathbf{T}|| = \mathbf{1}}$.

De même $w(x) = |x_1 x_2| = |\frac{\sin(2t)}{2}| \leq \frac{1}{2}$ (atteint), en posant par relèvement $|x_1 - = \cos t,\ |x_2| = \sin t$. Par suite $\boxed{\mathbf{w(T)} = \mathbf{\frac{1}{2}}}$

2.b.i) $\mathbf{T^*e_2 = e_1}$: $< T^*e_2, e_1 >=< e_2, Te_1 >=< e_2, e_2 >= ||e_2||^2 = ||e_1||^2 = 1$.

Sur une base supposée complétée orthonormée $(e_1, e'_2, ..., e'_n)$, on écrit $T^*e_2 = a_1e_1 + ... + a_ne'_n$ et $< T^*e_2, e_1 >= \overline{a_1} = 1$.

Or puisque $||T|| = 1$, T^* "n'augmente pas la norme" par conséquent $||T^*(e_2)||^2 = |a_1|^2 + ... + |a_n|^2 \leq 1||e_2||^2 = 1$; donc toutes les autres composantes de T^*e_2 sont nulles : $T^*e_2 = e_1$.

2.b.ii) $\mathbf{Te_2 = 0}$:

On va utiliser la même méthode que celle utilisée dans le préambule, les prémices, les préliminaires du théorème de d'ALEMBERT : $1 + a_pz^p + o(z^p)$ n'a pas 1, comme extrémum local en z=0, si $a_p \neq 0$. *(Voir la fin du cours sur les séries entières ronéo)*

On a puisque $w(T) = \frac{1}{2}$, $Sup_\theta||e^{i\theta}T + e^{-i\theta}T^*|| = 1$;

On va calculer l'image de l'endomorphisme entre normes, pour $x = e_2$, et si l'on trouve un θ, pour lequel la valeur de la norme de l'image est > 1 pour Te_2 non nul, il y aura contradiction.

On se place dans le plan, éventuellement arbitraire, si Te_2 est colinéaire à e_1, et on complète e_1 par V pour avoir une base orthonormée de ce plan (voir figure).

$e^{2i\theta}Te_2 + e_1$ a pour affixe dans cette base : $z = 1 + re^{2i\theta+\varphi}$; Le choix $\theta = -\frac{\varphi}{2}$, montre que $|z| = 1 + r > 1$ pour ce choix, si $r = ||Te_2|| \neq 0$. Donc $Te_2 = 0$.

On fait exactement de même pour T^*e_1, en prenant cette fois $x = e_1$, et utilisant le fait que $||e_2|| = 1$.

2.b.iii) $\mathbf{< e_1, e_2 >= 0}$: $< e_1, e_2 >=< e_1, Te_1 >=< T^*e_1, e_1 >=_{(ii)} < 0, e_1 >= 0$.

L'espace engendré par e_1 et e_2 répond à la question posée. *(Doit-on prouver l'existence de e_1, ou l'énoncé la considère-t-elle comme évidente ?)* L'existence de e_1, semble-t-il admise résulte immédiatement du fait que sur la sphère unité de H, qui est compacte (on est en dimension finie), l'application $x \mapsto ||T(x)||$, continue, atteint sa borne supérieure $||T|| = 1$.

Deuxième Partie

1.a) Éléments propres de $\mathbf{A_n}$: On pose $D_n = det(A_n - tI)$; $D_1 = -t,\ D_2 = t^2 - 1$. Le développement de D_n par rapport à la première colonne donne la relation de récurrence : $D_n = -tD_{n-1} - D_{n-2}$; suite récurrence linéaire, dont l'équation caractéristique est $r^2 + tr + 1 = 0$, dont le discriminant est $t^2 - 4$.

□ si $|t| \leq 2$, on pose $t = 2\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ (le cas $\theta = 0$, se complétant par continuité).

On constate que $D_1 = -\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ et que $D_2 = t^2 - 1 = 4\cos^2\theta - 1 = +\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$.

L'hypothèse de récurrence vraie pour n=1, n=2 $D_n = (-1)^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, se transfère immédiatement grace à la relation de récurrence : $D_{n+1} = -2\cos\theta(-1)^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + (-1)^n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sin\theta}(2\cos\theta\sin(n+1)\theta - \sin n\theta) = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sin\theta}(\sin(n+2)\theta)$.

□ si $|t| \geq 2$, on pose $t = 2\cosh\theta$, et le même raisonnement ou le changement de θ en $i\theta$ donne $D_n = D_n = (-1)^n\frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}$, qui n'a pas de zéros réels.

Comme D_n ne s'annule que pour $(n+1)\theta = k\pi$.

A_n a donc n valeurs propres distinctes (utiliser la monotonie de cos sur $[0,\pi]$) qui sont $\boxed{\mathbf{t_k = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}}}$

■ Comme les valeurs propres sont simples, chaque espace propre est de dimension 1, c'est une droite vectorielle, dont il suffit de trouver un vecteur non nul, que l'on cherche sous la forme indiquée.

θ étant égal à $\frac{k\pi}{n+1}$, on pose $V = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$.

Alors $A_nV = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ \sin\theta + \sin 3\theta \\ \vdots \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin(n-1)\theta + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin(n-1)\theta + \sin(n+1)\theta \end{pmatrix} = 2\cos\theta V.$

1.b) Norme de $\mathbf{A_n}$: D'après ce qu'on a remarqué depuis le début, puisque A_n est hermitienne, sa norme est le plus grand des modules des valeurs propres : $\boxed{||\mathbf{A_n}|| = \mathbf{2}\cos\frac{\pi}{\mathbf{n+1}}}$

2.a) Norme de $\mathbf{S_n}$: $< x, S_nx >= |x_1|^2 + ... + |x_{n-1}|^2 \leq |x_1^2| + ... + |x_n^2| = ||x||^2$ donc $\boxed{||\mathbf{S_n}|| = \mathbf{1}}$ puisque l'égalité est atteinte pour $x_n = 0$.

2.b) Calculer $\mathbf{w(S_n)}$: u étant l'endomorphisme associé à $e^{i\theta}S_n + e^{-i\theta}S_n^*$, il est immédiat de vérifier que si l'on prend comme nouvelle base $e'_1 = e^{-i\theta}e_1$, $e'_2 = e_2$, $e'_3 = e^{-i\theta}e_3$,.... $e'_n = e^{-i(n-2)\theta}e_n$, que u a comme matrice A_n sur cette nouvelle base.

Deux matrices semblables ayant les mêmes valeurs propres, on a d'après (I.1.d) $\boxed{\mathbf{w(S_n)} = \cos\frac{\pi}{\mathbf{n+1}}}$

⚠ Si n=1, (I.1.b) est triste : les trois membres sont nul !

□ **Existence de $\mathbf{x_0}$:** D'après (I.1.d), et la remarque de (II.2.b) $w(S_n)$ n'est atteint que pour le vecteur propre V associé à la valeur propre de plus grand module de A_n. Comme les valeurs propres sont simples, V est défini à une constante multiplicative non nulle près. Il suffit de poser $x_0 = \frac{V}{||V||}$; Comme on cherche les vecteurs de norme 1, la constante multiplicative doit être de module 1, cqfd

Troisième Partie

1.a) Majorer $|\beta_{1,2}|$: Compte tenu des définitions, $\beta_{1,2} = \gamma_{1,2} + \gamma_{2,3} + ... + \gamma_{n-1,n}$.

Or, en notant toujours $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $<,>$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$, $\gamma_{i,j} =< \varepsilon_i, \gamma\varepsilon_j >$, et l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, appliquée à la forme quadratique hermitienne positive $x \mapsto < x, \gamma x >$, de forme polaire $(x,y) \mapsto < x, \gamma y >$, donne $|\gamma_{i,j}|^2 \leq < \varepsilon_i, \gamma\varepsilon_i >< \varepsilon_j, \gamma\varepsilon_j >= \gamma_{i,i}\gamma_{j,j}$.

On en déduit $\boxed{|\beta_{1,2}| \leq |\gamma_{1,2}| + ... + |\gamma_{n-1,n}| \leq (\gamma_{1,1}\gamma_{2,2})^{\frac{1}{2}} + ... + (\gamma_{n-1,n-1}\gamma_{n,n})^{\frac{1}{2}}}$

1.b) En déduire $|\beta_{1,2}| \leq \mathbf{w(S_n)}$: Si $x \in \mathbb{C}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$, $< x, S_nx >= \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}x_{i-1}$.

Prenons $x_i = (\gamma_{i,i})^{\frac{1}{2}}$. Alors $< x, S_nx >= (\gamma_{1,1}\gamma_{2,2})^{\frac{1}{2}} + ... + (\gamma_{n-1,n-1}\gamma_{n,n})^{\frac{1}{2}}$.

Mais aussi $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\beta_{i,i} - \beta_{i+1,i+1}) = \beta_{1,1} = 1$.

Donc $< x, S_nx >= | < x, S_nx > | \leq w(S_n)$ et par suite $\boxed{|\beta_{1,2}| \leq \mathbf{w(S_n)}}$

2) La matrice γ est positive : La définition de $\beta_{i,j}$ assure que $\overline{\beta_{i,j}} = \beta_{j,i}$, donc aussi $\overline{\gamma_{i,j}} = \gamma_{j,i}$, et γ est hermitienne.

Par ailleurs, soit $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{C}^n$: $<y,\gamma y>=\sum_{i,j}\overline{y_i}\gamma_{i,j}y_j=\sum_{i,j}\overline{y_i}\beta_{i,j}y_j-\sum_{i,j}\overline{y_i}\beta_{i+1,j+1}y_j$. Or $\sum_{i,j}\overline{y_i}\beta_{i,j}y_j=\sum_{i,j}\overline{y_i}<T^{i-1}x,T^{j-1}x>y_j=<\sum_i y_iT^{i-1}x,\sum_j y_jT^{j-1}x>=||z||^2$ si $z=\sum_i y_iT^{i-1}x$.

(Dans ce calcul les produits scalaires de la première ligne sont dans $\mathbb{C}^n$ et ceux de la seconde sont dans H).

De même $\sum_{i,j}\overline{y_i}\beta_{i+1,j+1}y_j=||z'||^2$ où $z'=\sum_i y_iT^ix=Tz$.

Comme $||T||=1$, $||Tz||\leq||z||$, donc $<y,\gamma y>\geq 0$ et γ **est donc hermitienne positive.**

□ $\mathbf{w(T)\leq w(S_n)}$ **:** en fait nous sommes dans les hypothèses du (1) car non seulement γ est positive, mais aussi $\beta_{1,1}=<x,x>=1$ et $\beta_{k,l}=0$, pour k ou $l\geq n+1$ car $T^n=0$.

On en déduit $|\beta_{1,2}|\leq w(S_n)$, c'est à dire $|<x,Tx>|\leq w(S_n)$. Ceci vaut pour tout x de norme 1, donc

$\boxed{\mathbf{w(T)\leq w(S_n)}}$

3.a) Existence de T : L'application $x\mapsto|<x,Rx>|$, continue sur la sphère unité compacte de H, atteint sa borne supérieure, donc il existe $x\in H$, $||x||=1$ tel que $|<x,Rx>|=w(R)=w(S_n)$.

Il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $|<x,Rx>|=e^{i\theta}<x,Rx>$, et il suffit donc de prendre $T=e^{i\theta}R$ pour avoir $<x,Tx>=w(S_n)$.

Remarquons que l'on a aussi $w(T)=w(R)(=w(S_n))$, $||T||=1$ et $T^n=0$.

3.b.i) Égalité à montrer : $\sum_{j=1}^n\lambda_j<\eta_j,S_n\eta_j>=\sum_{j=1}^n<\gamma\eta_j,S_n\eta_j>=\sum_{j=1}^n<\eta_j,\gamma S_n\eta_j>=Trace(\gamma S_n)=Trace(S_n\gamma)$.

D'autre part $Tr(S_n\gamma)$ se calcule aussi dans la base canonique : $Tr(S_n\gamma)=\sum_{i=1}^n<\varepsilon_i,S_n\gamma\varepsilon_i>=\sum_{i=1}^n<S_n^*\varepsilon_i,\gamma\varepsilon_i>=\sum_{i=1}^n<\varepsilon_{i-1},\gamma\varepsilon_i>=\sum_{i=1}^n\gamma_{(i-1),i}=\beta_{1,2}=<x,Tx>=w(S_n)$.

Finalement on a prouvé que : $\boxed{\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}}\lambda_\mathbf{j}<\eta_\mathbf{j},\mathbf{S_n}\eta_\mathbf{j}>=\mathbf{Tr(S_n}\gamma)=\mathbf{w(S_n)}}$

3.b.ii) calculer les valeurs propres : Comme $||\eta_j||=1$, on a pour tout j $|<\eta_j,S_n\eta_j>|\leq w(S_n)$. L'inégalité triangulaire donne donc : $w(S_n)=\sum_j\lambda_j<\eta_j,S_n\eta_j>=|\sum_j\lambda_j<\eta_j,S_n\eta_j>|\leq\sum_j\lambda_j|<\eta_j,S_n\eta_j>|\leq(\sum_j\lambda_j)w(S_n)$.

Mais $\sum_{j=1}^n\lambda_j=Tr(\gamma)=\sum_{i=1}^n\gamma_{i,i}=\beta_{1,1}=<x,x>=1$, de sorte que les inégalités précédentes sont des égalités :

□ Dans l'inégalité triangulaire, cela signifie que tous les $\lambda_j<\eta_j,S_n\eta_j>$, non nuls ont le même argument que leur somme $w(S_n)$, c'est à dire qu'ils sont tous réels positifs. En particulier chaque fois que $\lambda_j\neq0$, $<\eta_j,S_n\eta_j>\in\mathbb{R}_+$.

□ Dans la seconde inégalité, l'égalité signifie que lorsque $\lambda_j\neq0$, $<\eta_j,S_n\eta_j>=w(S_n)$. D'après le (II.2.b), ces η_j sont tous colinéaires à x_0. Comme les η_j sont indépendants, cela n'est possible que pour un seul (au plus). Ainsi seul λ_1 peut être non nul (et il l'est, puisque $\sum_i\lambda_i=1$).

$\boxed{\textbf{On a même }\lambda_\mathbf{1}=\mathbf{1}\textbf{, et }\eta_\mathbf{1}\textbf{ est de la forme }\mathbf{e^{i\alpha}x_0}\textbf{ ; Les autres }\lambda_\mathbf{i},\ \mathbf{i\geq2}\textbf{ sont nuls}}$

3.b.iii) Calculer $\beta_{\mathbf{i,j}}$: La forme que l'on vient d'obtenir pour la matrice de l'endomorphisme γ dans la base (η_j), montre que γ n'est autre que la projection orthogonale, sur la droite $\mathbb{C}\eta_1=\mathbb{C}x_0$. Ceci permet le calcul des $\gamma_{i,j}$, coefficients de la matrice de γ dans la base canonique $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ en fonction des coordonnées $(\xi_1,...,\xi_n)$ de x_0 dans cette même base, c'est à dire $\xi_i=<\varepsilon_i,x_0>$; En effet $\gamma(\varepsilon_j)=<x_0,\varepsilon_j>x_0=\overline{\xi_j}x_0$, d'où, pour $1\leq i,j\leq n$: $\gamma_{i,j}=<\varepsilon_i,\gamma(\varepsilon_j)>=\overline{\xi_j}<\varepsilon_i,x_0>=\overline{\xi_j}\xi_i$.

Notons que si l'on convient que $\xi_k=0$, pour $k>n$, l'égalité $\gamma_{i,j}=\overline{\xi_j}\xi_i$ vaut alors pour tout $i,j\geq1$.

Or compte tenu des définitions, $\beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{i+k,j+k}$ (somme télescopique de premier terme $\beta_{i,j}$ et de dernier terme nul).

Donc $\forall i,j \geq 1,\ \beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\xi_{j+k}}\xi_{i+k}$.

D'autre part, $S_n^{i-1}x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varepsilon_{k+i-1}$ si l'on convient $\varepsilon_k = 0$ pour $k > n$.

$$S_n^{i-1}x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_{k-i+1}\varepsilon_k \text{ si l'on convient } \xi_k = 0 \text{ pour } k \leq 0.$$

Donc $< S_n^{i-1}x_0, S_n^{j-1}x_0 >= \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_{k-i+1}}\xi_{k-j+1}$, et en remplaçant k par $n-k$:

$< S_n^{i-1}x_0, S_n^{j-1}x_0 >= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\xi_{n+1-k-i}}\xi_{n+1-k-j}$.

Il faut alors rappeler (II.2.b) que x_0 est vecteur propre de A_n associé à λ_1, c'est à dire proportionnel à $(\sin\theta_1, \sin 2\theta_1, ..., \sin n\theta_1)$ où $\theta_1 = \frac{\pi}{n+1}$, de sorte que $\xi_{n+1-k} = \xi_k$, pour $1 \leq k \leq n$, mais en fait pour tout k avec nos conventions $\xi_k = 0$, pour $k \leq 0$ ou $k > n$.

Il en résulte donc $< S_n^{i-1}x_0, S_n^{j-1}x_0 >= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\xi_{k+i}}\xi_{k+j}$.

Enfin la proportionalité de x_0 et du vecteur réel $(\sin\theta_1, \sin 2\theta_1, ..., \sin n\theta_1)$, assure que les produits $\overline{\xi_{k+i}}\xi_{k+j}$ sont réels car de la forme $\mu\overline{\mu}\sin(k+i)\theta_1 \sin(k+j)\theta_1$, donc $< S_n^{i-1}x_0, S_n^{j-1}x_0 >= \beta_{i,j}$.

3.c) $\dim(\mathbf{V_x}) = \mathbf{n}$: Il s'agit donc de prouver que la famille $(x, Tx, ..., T^{n-1}x)$ est libre. Supposons que $t_1x + t_2Tx + ...t_nT^{n-1}x = 0$, avec les t_i non tous nuls et soit k le premier indice tel que $t_k \neq 0$.

En appliquant T^{n-k} à l'égalité, il vient $t_kT^{n-1}x = 0$, d'où $T^{n-1}x = 0$. Or $||T^{n-1}x||^2 = \beta_{n,n} = ||S_n^{n-1}x_0||^2$. On a déja vu ci dessus que x_0 est de la forme $x_0 = \mu(\sin\theta_1, ...\sin n\theta_1)$ avec $\mu \neq 0$. D'où $S_n^{n-1}x_0 = \mu(0, ..., 0, \sin\theta_1) \neq 0$; cette contradiction prouve que $(x, Tx, ..., T^{n-1}x)$ est libre donc $\boxed{\mathbf{\dim(V_x) = n}}$

3.d) Existence de U isométrie : En utilisant la base précédente, on définit une application linéaire $U : V_x \mapsto \mathbb{C}^n$ en posant pour $k \in [0, n-1]$ $U(t^kx) = S_n^kx_0$.

• U est une isométrie (linéaire) car elle conserve le produit scalaire sur les éléments de la base : $\forall i,j \geq 1$ $< UT^{i-1}x, UT^{j-1}x >=< S_n^{i-1}x_0, S_n^{j-1}x_0 >=< T^{i-1}x, T^{j-1}x >$.

Par sesquilinéarité, elle conserve donc le produit scalaire, donc la norme et les distances.

• U est par suite injective et donc bijective (les deux espaces d'arrivée et de départ on même dimension finie).

$\boxed{\textbf{U est une isométrie linéaire bijective}}$

□ On a bien $UT_xU^{-1} = S_n$, c'est à dire $UT_x = S_nU$, puisque pour tout élément de la base $(x, Tx, ..., T^{n-1}x)$, de V_x : $UT_x(T_x^kx) = U(T_x^{k+1}x) = S_n^{k+1}x_0$ (même si $k = n-1$ car $T_x^nx = 0$ et $S_n^nx_0 = 0$) et $S_nU(T_x^kx) = S_n(S_n^kx_0) = S_n^{k+1}x_0$.

Coïncidant sur une base UT_xU^{-1} et S_n sont égaux.

3.e) Existence de l'isométrie J : Puisque $T_x = e^{i\theta}R_x$, on a $UR_xU^{-1} = e^{-i\theta}S_n$.

Considérons l'endomorphisme Q de $\mathbb{C}^n$, défini sur la base canonique (ε_k), par $Q\varepsilon_k = e^{ik\theta}\varepsilon_k$.

Q est clairement un automorphisme unitaire, donc une isométrie vectorielle, et pour tout k : $QS_nQ^{-1}\varepsilon_k = QS_n(e^{-ik\theta}\varepsilon_k) = Q(e^{-ik\theta}\varepsilon_{k+1}) = e^{i\theta}\varepsilon_{k+1}$ (en convenant que $\varepsilon_{n+1} = 0$), de sorte que $QS_nQ^{-1} = e^{i\theta}S_n$, et donc $QUR_xU^{-1}Q^{-1} = S_n$: en prenant l'isométrie composée $J = QU : V_x \mapsto \mathbb{C}^n$, on obtient $JR_xJ^{-1} = S_n$.

---

4) Ensemble des valeurs possibles de w(T) : On sait déja avec le (III.2) que $w(T) \leq w(S_n)$ et avec le (I.1.b) que $w(T) \geq \frac{1}{2}$; l'ensemble Ω cherché est donc inclus dans $[\frac{1}{2}, w(S_n)] = [\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi}{n+1}]$.

(Remarque : ici $n \geq 3$; si $n = 2$, ce que l'on vient d'écrire, donne $\Omega = \{\frac{1}{2}\}$ et c'est compte tenu de $w(S_2) = \frac{1}{2}$, le résultat déja obtenu au (II.2)).

Considérons $S(t)$. Comme dans la question (II.2.b), on prouve que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}S_n(t) + e^{-i\theta}S_n(t)^*$, est semblable à $S_n(t) + S_n(t)^*$; Il résulte, avec la formule du (I.1.d), que $w(S(t)) = \frac{1}{2}||S_n(t) + S_n(t)^*||$. Or $S_n(t) + S_n(t)^*$

s'écrit $B+tC$, où B et C sont des matrices constantes, de sorte que $w(S(t)) = \frac{1}{2}||B+tC||$, et par continuité de la norme, l'application $t \mapsto w(S(t))$ est continue sur $[0,1]$.

Mais $S(1) = S_n$, donc $w(S(1)) = w(S_n)$ et par ailleurs $w(S(0)) = \frac{1}{2}$ (c'est le même calcul que pour $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, déja effectué en (I.2.a)).

Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc que $w(S(t))$ prend toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et $w(S_n)$, et finalement on peut conclure $\boxed{\mathbf{\Omega = [\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi}{n+1}]}}$

Quatrième Partie

1.a) Existence de g : Rappelons d'abord que les application $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ sont linéairement indépendantes, et l'écriture de f est donc unique. L'égalité $f(\theta) = \overline{f(\theta)}$ pour tout θ, impose donc que pour tout k, $\overline{f_k} = f_{-k}$. Quitte à diminuer n, on peut donc supposer $f_{n-1} \neq 0$ (avec toujours $n \geq 2$, car le cas $n=1$ qui donne f constante égale à f_0, est évident en prenant $g` \equiv g_0 = \sqrt{f_0}$).

Soit alors $P(z)$ le polynôme : $z^{n-1} \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k z^k$, qui est de degré $2n-2$ et de valuation nulle et n'admet donc pas 0 pour racine. Calculons $\overline{z}^{2n-2}P(\frac{1}{\overline{z}})$, en tenant compte de $\overline{f_k} = f_{-k}$: $\overline{z}^{2n-2}P(\frac{1}{\overline{z}}) = \overline{z}^{n-1} \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k \frac{1}{\overline{z}^k} = \overline{z}^{-n-1} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \overline{f_{-k}}\overline{z}^{-k} = \overline{P(z)}$ par changement de k en $-k$.

Il apparaît ainsi que α racine de P ($\alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\overline{\alpha}}$ racine de P.

Plus précisément factorisons $P(z)$: $P(z) = f_{n-1}\prod_{\ell=1}^{2n-2}(z-\alpha_\ell)$ et l'égalité précédente s'écrit $f_{n-1}\prod_{\ell=1}^{2n-2}(1-\alpha_l\overline{z}) = \overline{f_{n-1}}\prod_{\ell=1}^{2n-2}(\overline{z}-\overline{\alpha_\ell})$, ce qui montre qu'à une permutation près la liste des $\overline{\alpha_\ell}$ et la liste des $\frac{1}{\alpha_\ell}$, sont identiques, et de même, en conjuguant pour la liste des α_ℓ et celle des $\frac{1}{\overline{\alpha_\ell}}$ (et donc avec le même ordre de multiplicité lorsqu'il y a répétition). Comme $\alpha_\ell = \frac{1}{\overline{\alpha_\ell}} \Longleftrightarrow |\alpha_\ell| = 1$, ceci amène à distinguer les racines de module $\neq 1$ (qu'on peut regrouper deux par deux) et les racines de module 1. On obtient ainsi : $P(z) = f_{n-1}\prod_p (z-\beta_p)(z-\frac{1}{\overline{\beta_p}})\prod_q (z-\gamma_q)^{r_q}$, où $|\beta_p| \neq 1$ et $|\gamma_q| = 1$, les γ_q étant deux à deux distincts, d'ordre de multiplicité r_q, alors que les β_p peuvent se répéter.

Revenons à $f(\theta)$:

$f(\theta) = e^{-i(n-1)\theta}P(e^{i\theta}) = e^{-i(n-1)\theta}f_{n-1}\prod_p (e^{i\theta}-\beta_p)(e^{i\theta}-\frac{1}{\overline{\beta_p}})\prod_q (e^{i\theta}-\gamma_q)^{r_q} \in \mathbb{R}^+ \ \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Montrons que chaque r_q est pair : γ_q, de module 1, s'écrit $e^{i\omega}$, de sorte que $f(\theta)$ s'écrit $f(\theta) = (e^{i\theta}-e^{i\omega})^{r_q}h(\theta)$, où h est aussi un polynôme trigonométrique, tel que $h(\omega) \neq 0$.

Le calcul des dérivées successives de f en ω montre que $f(\omega) = ... = f^{(r_q-1)}(\omega) = 0$ et $f^{(r_q)}(\omega) \neq 0$, de sorte qu'au voisinage de ω, $f(\theta) \sim f^{(r_q)}(\omega)(\omega-\theta)^{r_q}\frac{1}{r_q!}$.

La condition $f(\theta) \geq 0$, exige donc r_q pair : $r_q = 2s_q$.

En mettant les $\frac{1}{\beta_p}$ en facteur dans l'expression de $f(\theta)$, celle ci prend la forme :

$$f(\theta) = Ke^{-i(n-1)\theta}\prod_p (e^{i\theta}-\beta_p)(e^{i\theta}\overline{\beta_p}-1)\prod_q (e^{i\theta}-\gamma_q)^{2s_q}.$$

Comme $|e^{i\theta}-\beta_p| = |e^{-i\theta}-\overline{\beta_p}| = |e^{i\theta}\overline{\beta_p}-1|$ et $f(\theta) = |f(\theta)|$, car $f(\theta) \in \mathbb{R}^+$, il vient : $f(\theta) = |f(\theta)| = |K|.|\prod_p (e^{i\theta}-\beta_p)\prod_q (e^{i\theta}-\gamma_q)^{s_q}|^2 = |g(\theta)|^2$, où $\boxed{\mathbf{g(\theta) = \sqrt{|K|}\prod_p (e^{i\theta}-\beta_p)\prod_q (e^{i\theta}-\gamma_q)^{s_q}}}$ et g est bien un polynôme trigonométrique de la forme voulue.

1.b) $\mathbf{f_0 > 0}$: $f(\theta) = |\sum_{k=0}^{n-1} g_k e^{ik\theta}|^2 == \sum_{k=0}^{n-1} g_k e^{ik\theta}\sum_{\ell=0}^{n-1}\overline{g_\ell}e^{-i\ell\theta}$.

Par unicité de l'écriture de f, déja signalée, f_0 est le coefficient constant de ce développement : $f_0 = \sum_{k=0}^{n-1} g_k\overline{g_k} = \sum_{k=0}^{n-1} |g_k|^2 \geq 0$ et même > 0, sinon g serait identiquement nulle et f aussi.

□ $|\mathbf{f_1}| \leq \mathbf{f_0 w(S_n)}$: De même f_1 est le coefficient de $e^{i\theta}$: $f_1 = \sum_{k=1}^{n-1} g_k\overline{g_{k-1}}$, et on remarque que si $x = (g_0, ..., g_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $\overline{f_1} =< x, S_n x >$, et aussi $f_0 =< x, x >= ||x||^2$.

Il en résulte $\frac{|f_1|}{f_0} = | < \frac{x}{||x||}, S_n \frac{x}{||x||} > \leq w(S_n)$: donc $\boxed{|\mathbf{f_1}| \leq \mathbf{f_0 w(S_n)}}$

□ $\mathbf{w(S_n)}$ **meilleure constante :** D'après le (II.2.b), il suffit de prendre $g(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{(k+1)\pi}{n+1}) e^{ik\theta}$ et $f(\theta) = |g(\theta)|^2$, pour avoir l'égalité : $\boxed{\mathbf{w(S_n)\ est\ donc\ la\ meilleure\ constante\ possible}}$

2.a) Expression de X : La nilpotence de $e^{i\theta}T$ et de $e^{-i\theta}T^*$ assure l'inversibilité de $Id - e^{i\theta}T$, avec $(Id - e^{i\theta}T)^{-1} = \sum_{k\geq 0} e^{ik\theta}T^k$ et de même $(Id - e^{-i\theta}T^*)^{-1} = \sum_{\ell\geq 0} e^{-i\ell\theta}T^{*\ell}$. Ce sont des sommes finies puisque T, donc aussi T^* sont nilpotents.

Calculons ainsi $Y = (Id - e^{-i\theta}T^*)^{-1}(Id - T^*T)(Id - e^{i\theta}T)^{-1} = \sum_{k\geq 0}\sum_{\ell\geq 0} e^{i(k-\ell)\theta}T^{*\ell}(Id - T^*T)T^k$.

En réalité, k et ℓ, ne varient qu'entre 0 et $n-1$et $p = k - \ell$ ne varie qu'entre $-(n-1)$ et $n-1$, donc : $Y = \sum_{p=-n+1}^{n-1} e^{ip\theta} \sum_{\substack{k-\ell=p \\ k\geq 0\ \ell\geq 0}} (T^{*\ell}T^k - T^{*\ell+1}T^{k+1})$.

Ces dernières sommes sont télescopiques, de dernier terme nul, de premier terme T^p si $p > 0$, Id si $p = 0$, T^{*p} si $p < 0$. Ainsi $Y = Id + \sum_{p\geq 1}(e^{ip\theta}T^p + e^{-ip\theta}T^{*p})$, c'est le résultat demandé.

2.b) $\mathbf{f_x(\theta) =< x, Xx >}$:

D'une part $< x, Xx >=< x, x + \sum_{p\geq 1}(e^{ip\theta}T^p x + e^{-ip\theta}T^{*p}x) >= 1 + \sum_{p\geq 1} e^{ip\theta} < x, T^p x > + e^{-ip\theta} < x, T^{*p}x >= f_x(\theta)$ car $T^n = 0$ et $< x, T^{*p}x >=< T^p x, x >= f_{-p}$ pour $p \geq 1$

□ $\mathbf{f_x(\theta) \geq 0}$: $< x, Xx >=< x, (Id - e^{-i\theta}T^*)^{-1}(Id - T^*T)(Id - e^{i\theta}T)^{-1}x >=_{\text{car}} (U^*)^{-1} = (U^{-1})^* < (Id - e^{+i\theta}T)^{-1}x, (Id - T^*T)(Id - e^{i\theta}T)^{-1}x >=_{\text{si l'on pose}} y = (Id - e^{+i\theta}T)^{-1}x < y, (Id - T^*T)y >$

$=_{\text{car}} < y, T^*Ty >=< Ty, Ty >$ $||y||^2 - ||Ty||^2 \geq 0$, car $||T|| \leq 1$. Donc $\boxed{\mathbf{f_x(\theta) \geq 0\ pour\ tout\ \theta \in \mathbb{R}}}$

□ **En déduire que** $\mathbf{w(T) \leq w(S_n)}$: Comme ici $f_0 = 1$ et $f_1 =< x, Tx >$, la question (i.b) donne $| < x, Tx > | \leq w(S_n)$.

Ceci vaut pour tout x de norme 1, donc $\boxed{\mathbf{w(T) \leq w(S_n)}}$

3.a) Calculer $\sigma = \sum_{r=0}^{n} f(\frac{2\pi\ r}{n+1})$ **:**

$\sigma = \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k \sum_{r=0}^{n} e^{\frac{i2k\pi\ r}{n+1}}$;

Si $e^{\frac{i2k\pi}{n+1}} \neq 1$, $\sum_{r=0}^{n} (e^{\frac{i2k\pi}{n+1}})^r = \frac{1 - (e^{\frac{i2k\pi}{n+1}})^{n+1}}{1 - e^{\frac{i2k\pi}{n+1}}} = 0$;

Si $e^{\frac{i2k\pi}{n+1}} = 1$, la somme vaut $n+1$.

Or $e^{\frac{i2k\pi}{n+1}} = 1 \iff k$ multiple de $n+1$, ce qui dans la somme σ ne se produit que pour $k = 0$. Donc

$\boxed{\sum_{\mathbf{r=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{f}(\frac{\mathbf{2\pi\ r}}{\mathbf{n+1}}) = \mathbf{(n+1)f_0}}$

3.b) Barycentres : Un calcul analogue au précédent donne $\sum_{r=0}^{n} f(\frac{2\pi\ r}{n+1})e^{\frac{-i2\pi\ r}{n+1}} = (n+1)f_1$, et plus généralement pour tout $k \in [-n+1, n-1]$, $\sum_{r=0}^{n} f(\frac{2\pi\ r}{n+1})e^{\frac{-i2k\ \pi\ r}{n+1}} = (n+1)f_k$.

• Si on avait $f_0 = 0$, la positivité des $f(\frac{2\pi\ r}{n+1})$ entraînerait $\forall r = 0..n,\ f(\frac{2\pi\ r}{n+1}) = 0$, d'où, pour tout $k \in [-n+1, n-1]$, $f_k = 0$, donc $f = 0$, ce qu'on exclut.

• donc $f_0 \neq 0$ et $\frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{\sigma}\sum_{r=0}^{n} f(\frac{2\pi\ r}{n+1})e^{\frac{-i2\pi\ r}{n+1}}$, ce qui exprime $\frac{f_1}{f_0}$ comme barycentre à coefficients positifs des $e^{\frac{-i2\pi\ r}{n+1}}$, $0 \leq r \leq n$.

□ **Il en est de même pour toutes les images par rotation :** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut introduire $\varphi_\alpha = f(\theta+\alpha) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} f_k e^{ik\alpha}e^{ik\theta}$: c'est encore un polynôme trigonométrique, positif comme f, avec le même f_0 et f_1 remplacé par $f_1 e^{i\alpha}$.

Donc $\boxed{\frac{\mathbf{f_1 e^{i\alpha}}}{\mathbf{f_0}} \textbf{ est aussi barycentre à coefficients positifs des } e^{-i\frac{2\pi\ r}{n+1}}}$

3.c) Conclure : retrouver $|\frac{\mathbf{f_1}}{\mathbf{f_0}}| \leq \mathbf{w(S_n)}$: On vient de prouver que le cercle de centre O et de rayon $|\frac{f_1}{f_0}|$, est inclus dans l'enveloppe convexe des $e^{-i\frac{2\pi\ r}{n+1}}$, qui sont des racines $(n+1)$-ième de l'unité. Cette enveloppe convexe est un polygône régulier à $n+1$ cotés inscrit dans le cercle unité. Le cercle inscrit dans ce polygône a pour rayon $\cos\frac{\pi}{n+1}$ (c'est "l'apothème", hauteur des triangles isocèles constitutifs du polynône). On a donc $\boxed{|\frac{\mathbf{f_1}}{\mathbf{f_0}}| \leq \cos\frac{\pi}{\mathbf{n+1}} = \mathbf{w(S_n)}}$

Cinquième Partie

1) Caractérisation de $|\mathbf{a}| \leq \mathbf{1}$:

(i) implique (ii) : Si $|a| \leq 1$ et $|z| < 1$, alors $|az| < 1$, $Re(Az) < 1$ et $Re(1-az) \geq 0$.

Réciproquement si on a (ii), si l'on avait $|a| > 1$, a s'écrit $a = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 1$; en prenant $z = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{\rho}}$, on a $|z| < 1$ et $1 - az = 1 - \sqrt{\rho} < 0$; donc $\boxed{\mathbf{|a| \leq 1 \Longleftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \text{on a } Re(1-az) \geq 0)}}$

2.a) Caractérisation de $\mathbf{w(A) \leq 1}$: Posons $C = Id - \frac{1}{2}(zA + \overline{z}A^*)$. Alors pour tout x, $< x, Cx >= ||x||^2 - \frac{1}{2}z < x, Ax > -\frac{1}{2}\overline{z} < x, A^*x >= ||x||^2 - Re(z < x, Ax >)$, et si $||x|| = 1$, alors $< x, Cx >= 1 - Re(z < x, Ax >)$.

Avec le critère de la question (1) précédente, on déduit donc que C positif pour tout z tel que $|z| < 1 \Longleftrightarrow \forall x$ de norme 1 $| < x, Ax > | \leq 1 \longleftrightarrow w(A) \leq 1$.

2.b) Nouvelle caractérisation de $\mathbf{w(A) \leq 1}$:

• Si $w(A) \leq 1$, on a vu au (I.1.c) que lorsque $|z| < 1$, $Id - zA$ est inversible.

Posons alors $D = (Id - zA)^{-1} + \big((Id - zA)^{-1}\big)^*$. Pour tout $x \in H$, on obtient ici encore : $< x, Dx >= 2Re < x, (Id - zA)^{-1}x >=_{\text{si}} y = (Id - zA)^{-1}x \quad 2Re < (Id - zA)y, y >= 2Re < y, (Id - zA)y >=< y, \big((Id - zA) + (Id - zA)^*\big)y >= 2 < y, Cy >$, avec le même C qu'au (a). Or C est positif d'après le (a), donc D est positif.

• Réciproquement, le calcul ci-dessus montre que D positif implique C positif, car $y = (Id - zA)^{-1}x$ décrit H, et d'après le (a), D positif implique $w(A) \leq 1$.

3.a) Expression de $(\mathbf{Id - z^n A^n})^{-1}$: Notons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, les racines n-ième de l'unité, et posons $X^n - 1 = (X - w_k)P_k(X)$.

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n-1}$ s'écrit : $\frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega_k}$ (1) où $\alpha_k = \frac{1}{P_k(\omega_k)}$; de plus (cours de sup) $P_k(\omega_k) = (X^n - 1)'_{X=\omega_k} = n\omega_k^{n-1}$ et donc $\alpha_k = \frac{1}{n}\omega_k$.

En multipliant la décomposition (1) par $X^n - 1$, on obtient l'identité polynomiale $\boxed{1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\omega_k P_k(X)}$.

Par morphisme, pour l'endomorphisme zA, il vient alors : $Id = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\omega_k P_k(zA)$ (2)

Mais $1 - X^n = (\omega_k - X)P_k(X)$ implique $Id - z^n A^n = (\omega_k Id - zA)P_k(zA)$, d'où puisque $Id - \overline{\omega_k} zA$ est inversible (car $w(\overline{\omega_k}A) = w(A) \leq 1$) : $\omega_k P_k(zA) = (Id - \overline{\omega_k} zA)^{-1}(Id - z^n A^n)$, et en remplaçant dans (2) : $Id = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Id - \overline{\omega_k} zA)^{-1}(Id - z^n A^n)$; comme $\{\omega_k\} = \mathbb{U}_n = \{\overline{\omega_k}\}$, cela prouve l'inversibilité de $Id - z^n A^n$ et $(Id - z^n A^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(Id - \omega_k zA)^{-1}$.

3.b) $\mathbf{w(A^n) \leq 1}$: Puisque $w(A) \leq 1$ et $|\omega_k z| < 1$, la formule ci dessus, jointe au (2.b), montre que $(Id - z^n A^n)^{-1} + \left((Id - z^n A^n)^{-1}\right)^*$ est positif. Comme z^n décrit l'ensemble des nombres complexes de module < 1 lorsque z le décrit lui même, le sens réciproque de (2.b) donne $w(A^n) \leq 1$.

3.c) $\mathbf{w(B^n) \leq (w(B)^n}$: On remarque que pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$, $w(\rho B) = \rho w(B)$.

- Si $w(B) \neq 0$, on prend $\rho = \frac{1}{w(B)}$.

Alors $w(\rho B) = 1$, donc selon (b) $w(\rho^n B^n) \leq 1$, c'est à dire $w(B^n) \leq w(B)^n$.

- Si $w(B) = 0$, on a pour tout $\rho \in \mathbb{R}_*^+$, $w(\rho B) = 0 \leq 1$, donc $w(\rho^n B^n) \leq 1$, c'est à dire $w(B^n) \leq \frac{1}{\rho^n}$ et donc $w(B^n) \leq 0 = w(B)$. (Le résultat découle aussi de (I.1.b), qui donne B=0).

Sixième Partie

1) W(A) est inclus dans un triangle :

Le triangle T de sommets z_i est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de z_1, z_2, z_3. Supposons d'abord que $A = \sum_{i=1}^{3} z_i A_i$, avec les conditions voulues et soit, $x \in H$ avec $||x|| = 1$: $< x, Ax >= \sum_{i=1}^{3} z_i < x, A_i x >$. Or $< x, A_i x > \in \mathbb{R}+$, car A_i positif, et $\sum_{i=1}^{3} < x, A_i x >=< x, x >= 1$, donc $< x, Ax > \in T$ et on a bien $W(A) \subset= T$.

■ Inversement, supposons $W(A) \subset= T$ et supposons d'abord que z_1, z_2, z_3, soient deux à deux distincts.

Analyse si $A = z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3$ comme voulu, alors en prenant les adjoints : $A^* = \overline{z_1} A_1^* + \overline{z_2} A_2^* + \overline{z_3} A_3^*$, de sorte qu'en tenant compte de $\overline{z_i} = \frac{1}{z_i}$, A_1, A_2, A_3 sont solutions du système $\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3 = A \\ \frac{1}{z_1} A_1 + \frac{1}{z_2} A_2 + \frac{1}{z_3} A_3 = A^* \end{cases}$

Aves les z_i distincts, ce système est de Cramer (le déterminant est "presque" un Vandermonde), et admet donc une solution unique.

Synthèse Soit A_1, A_2, A_3 la solution unique précédente. On a déja $\sum_{i=1}^{3} A_i = Id$ et $\sum_{i=1}^{3} z_i A_i = A$ et il reste seulement à véifier que les A_i sont positifs.

- En prenant l'adjoint dans les équations, on constate que A_1^*, A_2^*, A_3^* sont solutions du même système, donc par unicité, $A_i^* = A_i$ et A_i est hermitien.
- Pour $x \in H$, $||x|| = 1$: $< x, Ax >= \sum_{i=1}^{3} z_i < x, A_i x >$ et $< x, A_i x > \in \mathbb{R}$ car A_i est hermitien et $\sum_{i=1}^{3} < x, A_i x >= 1$ car $\sum_{i=1}^{3} A_i = Id$.

Cela signifie que les $< x, A_i x >$ sont les coefficients barycentriques normalisés de $< x, Ax >$ par rapport à z_1, z_2, z_3. Ces coefficients sont uniques car les z_i, distincts et de norme 1, forment un vrai triangle. Comme $< x, Ax > \in T$, ils sont positifs : $x, A_i x >\geq 0$ et ceci pour tout x de norme 1, donc par homogénéité pour tout x. **Les $\mathbf{A_i}$ sont bien positifs et le résulttat est établi**.

■ Supposons encore $W(A) \subset= T$ et cette fois $z_1 \neq z_2 = z_3$. $W(A)$ est donc inclus dans le segment $[z_1, z_2]$, c'est à dire que pour tout x de norme 1, $< x, Ax > \in [z_1, z_2]$. Si on pose $B = \frac{A - z_1 Id}{z_2 - z_1}$, on a alors $< x, Bx > \in [0, 1]$.

B est alors hermitien, car si on écrit $B = C + iD$, avec C et D hermitiens, alors $< x, Dx >= 0$ pour tout x de norme 1, D est alors hermitien positif et négatif donc nul. Avec de plus $< x, Bx > \in [0, 1]$ B est positif. De même

puisque pour $||x|| = 1$ $< x, (Id-B)x > \in [0,1]$, on a aussi $Id-B$ positif. Or $B = \frac{A-z_1 Id}{z_2-z_1} \Longrightarrow A = (z_2-z_1)B + z_1 Id = z_2 B + z_1(Id-B)$, d'où le résultat voulu avec $\boxed{A_1 = Id - B,\ A_2 = B,\ A_3 = 0}$

■ Enfin si $z_1 = z_2 = z_3$, on a pour tout x de norme 1, $< x, Ax >= z_1$, donc $< x, (A - z_1 Id)x >= 0$, de sorte que $A = z_1 Id$ et on peut prendre $A_1 = Id,\ A_2 = A_3 = 0$.

---

2) Condition pour que $||\mathbf{B}|| \leq \mathbf{1}$:

Posons $C = \begin{pmatrix} I & B^* \\ B & I \end{pmatrix}$. Pour $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, colonne de hauteur 2n, $X^*CX = Y^*Y + Z^*Z + 2Re(Z^*BY)$, c'est à dire $< X, CX >=< Y, Y > + < Z, Z > + 2Re < Z, BY >$.

- *si* $||B|| \leq 1$, $|2Re < Z, BY > | \leq 2||Z||\,||Y|| \leq ||Y||^2 + ||Z||^2$, *donc* $< X, CX > \geq 0$
- *si* $||B|| > 1$, *il existe* $Y \neq 0$ *tel que* $||BY|| > ||Y||$. *Prenons* $Z = -BY$ $< X, CX >= ||Y||^2 + ||BY||^2 - 2||BY||^2 < 0$

On a bien $\boxed{||\mathbf{B}|| \leq \mathbf{1} \Longleftrightarrow \mathbf{C} \text{ positive}}$

---

3) $||\mathbf{A}||\max(|\mathbf{z_i}|)$: Quitte à multiiplier par un réel positif ρ, on peut supposer que $max|z_i| = 1$ (le cas où les z_i sont tous nuls est immédiat car alors $A = 0$ d'après (I.1.b)), et quitte à agrandir le triangle, on peut supposer $\forall i\ |z_i| = 1$. Il s'agit alors de montrer que $||A|| \leq 1$.

Le résultat du la première question, permet d'écrire $A = z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3$, A_i hermitiens positifs de somme Id.

Posons encore $C = \begin{pmatrix} I & A^* \\ A & I \end{pmatrix}$. Avec $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$: $< X, CX >= ||Y||^2 + ||Z||^2 + 2Re < Y, AZ >$, et $Re < Y, AZ >= Re(z_1 < Y, A_1 Z >) + Re(z_2 < Y, A_2 Z >) + Re(z_3 < Y, A_3 Z >)$.

Or A_i étant positif, $< Y + z_i Z, A_i(Y + z_i Z) > \geq 0$, c'est à dire $< Y, A_i Y > + < Z, A_i Z > + 2Re(z_i < Y, A_i Z >) \geq 0$ (On a regroupé $z_i < A, A_i Z >$ et $\overline{z_i} < Z, A_i Y >$ en tenant compte de $< Z, A_i Y >=< A_i Z, Y >= \overline{< Y, A_i Z >}$).

Et en additionnant ces trois inégalités, on obtient puisque $\sum_{i=1}^{3} A_i = Id$: $< Y, Y > + < Z, Z > + 2\sum_{i=1}^{3} Re(z_i < Y, A_i Z >) \geq 0$., c'est à dire $< X, CX > \geq 0$.

C étant positive, on a $||A|| \leq 1$, ce qu'on voulait.

---

4) $||\mathbf{T}||^2 \leq ||\mathbf{A}||^2 + ||\mathbf{B}||^2$:

Soit $x \in H$, $||x|| = 1$: $< x, Tx >=< x, Ax > + i < x, Bx >$; Compte tenu des hypothèses, $< x, Ax > \in \mathbb{R}^+$, et $< x, Ax > \leq ||A||$; $< x, Bx > \in \mathbb{R}^+$, $< x, Bx > \leq ||B||$, de sorte que $W(T)$ est inclus dans le rectangle hachuré $(O, ||B||, ||A||, z_2)$, ci contre, *(où l'on a pris* $z_1 = -||A|| + i||B||$, $z_2 = ||A|| + i||B||$, $z_3 = ||A|| - i||B||$*)*, et donc à fortiori dans le triangle (z_1, z_2, z_3).

Le (3) donne alors $||T||^2 \leq max(|z_i|^2) = ||A||^2 + ||B||^2$.

---

5) L'inégalité est fausse avec A et B seulement supposés hermitiens : Il suffit de trouver un contre exemple : prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, hermitiens avec $spectre(A) = spectre(B) = \{1, -1\}$, donc $||A|| = ||B|| = 1$:

$T = A + iB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{||TX||}{||X||} = 2$, donc $||T|| \geq 2$. Ainsi $||T||^2 \geq 4$ alors que $||A||^2 + ||B||^2 = 2 < 4$. L'inégalité est fausse *(remarque en fait* $||T|| = 2$*)*.

ENS ULM LYON 99