ENSAIT
CONCOURS D'ENTREE A-1999
EPREUVE de MATHEMATIQUES II
Durée 2 heures (tous les candidats)

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

L'usage des calculatrices est interdit

$\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels

On note $\mathcal{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n,
et $B = \{1, X, X^2 ..., X^n\}$ sa base canonique.
Etant donné une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$, on lui associe
les polynomes $L_0, L_1, L_2 ... L_n$ de $\mathcal{R}_n[X]$ tels que :
$\forall j \in \{0, 1, 2, ..n\} - \{i\} \quad L_i(a_j) = 0$
et $L_i(a_i) = 1$
On note enfin A la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les composantes dans la base B des vecteurs $L_0, L_1, L_2, ... L_n$.

I) On prend $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.
1) Donner L_0, L_1, L_2
Montrer que $\{L_0, L_1, L_2\}$ est une base de $\mathcal{R}_2[X]$.
Quelles sont les les composantes d'un polynome P de $\mathcal{R}_2[X]$ dans cette base $\{L_0, L_1, L_2\}$?
2) Former la matrice de changement de base de $B = \{1, X, X^2\}$ à $B' = \{L_0, L_1, L_2\}$
Montrer qu'elle est diagonalisable, qu'elle admet une valeur propre entière, déterminer l'espace propre associé.
3) Déterminer les polynomes P de $\mathcal{R}_2[X]$ tels que
$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$

II) Retour au cas général
1) Montrer que $B' = \{L_0, L_1, L_2 .. L_n\}$ est une base de $\mathcal{R}_n[X]$.
Indiquer les composantes sur la base B' d'un polynome P quelconque de $\mathcal{R}_n[X]$.
2) Montrer que A est inversible, calculer son inverse
3) Montrer que $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.
En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de A est nulle.

III) Etude du cas $\mathbf{a}_0 = 0$
1) Montrer que la matrice A admet $\lambda = 1$ pour valeur propre.
2) Montrer qu'il existe des polynomes P de $\mathcal{R}_n[X]$, différents du polynôme nul tels que : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) X^i$

IV) Etude du cas $\mathbf{a}_0 = 1$
Montrer que la somme des éléments de la première colonne de A est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre colonne de A est nulle.

V) Etude du cas $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2, ... \quad a_n = n$
On note dorénavant :
$L_{i,p}$ le polynôme de $\mathcal{R}_p[X]$ tel que
$\forall j \in \{0, 1, ..p\} - \{i\} \quad L_{i,p}(j) = 0$
et $L_{i,p}(i) = 1$
Et on convient que $L_{0,0} = 1$

1) Montrer que $B'' = \{L_{0,0}, L_{1,1}, L_{2,2} ..., L_{n,n}\}$ est une base de $\mathcal{R}_n[X]$.
Soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k L_{k,k}$, déterminer ses racines.
2) a) Ecrire la matrice de changement de base de
$B' = \{L_{0,n}\ ,\ L_{1,n}\ ,\ L_{2,n} \cdots\ ,\ L_{n,n}\}$ à B''
b) Montrer que l'on peut écrire la matrice A comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.
c) Effectuer tous les calculs du V 2) b) pour $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$