

Première partie.

1. Si $P(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$, il vient :

$$L(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{p=0}^n a_p \int_{-1}^1 x^p dx = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1}$$

L'application L étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan de dimension n ($\dim(E) = n+1$), qui contient tous les polynômes impairs, ainsi que les polynômes pairs vérifiant $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1}$. Par

exemple :

- si $n = 2k$: $(x, x^3, \dots, x^{2k-1}, 1 - 3x^2, 1 - 5x^4, \dots, 1 - (2k+1)x^{2k})$.
- si $n = 2k+1$: $(x, x^3, \dots, x^{2k+1}, 1 - 3x^2, 1 - 5x^4, \dots, 1 - (2k+1)x^{2k})$.

2. a) Il s'agit du i -ième polynôme de Lagrange :

$$P_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (\forall 0 \leq i \leq n)$$

b) On sait que la famille (P_0, \dots, P_n) forme une base de E . Pour tout $P \in E$, on a :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n P(x_i) P_i(x)$$

et

$$L(P) = \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_{-1}^1 P_i(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$$

Ainsi $\lambda_i = \int_{-1}^1 P_i(x) dx$, $(0 \leq i \leq n)$.

3. On suppose que pour tout $i, 0 \leq i \leq n, x_{n-i} = -x_i$.

- si $n = 2k+1$, les points sont $(x_0, \dots, x_k, -x_k, \dots, -x_0)$.

$$P_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{(x - x_j)(x + x_j)}{(x_i - x_j)(x_i + x_j)} \times \frac{x + x_i}{2x_i}$$

$$P_{n-i}(x) = \prod_{j=0, j \neq n-i}^k \frac{(x - x_j)(x + x_j)}{(x_i - x_j)(x_i + x_j)} \times \frac{x - x_i}{2x_{n-i}}$$

Ainsi :

$$P_i(x) = \frac{N(x)(x + x_i)}{D}, \quad P_{n-i}(x) = \frac{N(x)(x - x_i)}{-D}$$

avec $N(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^k (x^2 - x_j^2)$. Donc, comme N est pair :

$$\lambda_i = \frac{1}{D} \int_{-1}^1 xN(x)dx + \frac{x_i}{D} \int_{-1}^1 N(x)dx = \frac{x_i}{D} \int_{-1}^1 N(x)dx$$

et

$$\lambda_{n-i} = -\frac{1}{D} \int_{-1}^1 xN(x)dx + \frac{x_i}{D} \int_{-1}^1 N(x)dx = \frac{x_i}{D} \int_{-1}^1 N(x)dx$$

• si $n = 2k$, les points sont $(x_0, \dots, x_{k-1}, 0, -x_{k-1}, \dots, -x_0)$.

En dehors du cas 0 :

$$P_i(x) = \frac{N(x)(x + x_i)}{D}, \quad P_{n-i}(x) = \frac{N(x)(x - x_i)}{D}$$

avec $N(x) = x \prod_{j=0, j \neq i}^k (x^2 - x_j^2)$. Donc, comme N est impair :

$$\lambda_i = \frac{1}{D} \int_{-1}^1 xN(x)dx + \frac{x_i}{D} \int_{-1}^1 N(x)dx = \frac{1}{D} \int_{-1}^1 xN(x)dx$$

et

$$\lambda_{n-i} = -\frac{1}{D} \int_{-1}^1 xN(x)dx + \frac{x_i}{D} \int_{-1}^1 N(x)dx = \frac{1}{D} \int_{-1}^1 xN(x)dx$$

Le cas 0 est simple, puisqu'alors $P_{n/2} = P_{n-n/2}$.

L'égalité demandée est vérifiée dans le cas général pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n . Par linéarité de l'intégrale, il reste à le montrer pour $P = x^{n+1}$. Mais, comme n est pair :

$$0 = \int_{-1}^1 x^{n+1}dx = \sum_{i=0}^{n/2} \lambda_i (x_i^{n+1} + (-x_i)^{n+1})$$

Remarque : une autre solution (peut être plus courte) consiste à remplacer k par $n - k$ et x par $-x$ au lieu de considérer deux cas.

4. a) Soit P_f le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$. On a alors :

$$P_f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)P_i(x) \Rightarrow \int_{-1}^1 P_f(x)dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$$

Ecrivons une formule de Taylor Lagrange à l'ordre n pour f . Il existe R_n tel que, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)x^{n+1} = P(x) + R_n(x)x^{n+1}$$

avec $\sup_{x \in [-1, 1]} |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$

Donc, comme $P - P_f$ est un polynôme de degré n :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 f(x)dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \right| &\leq \left| \int_{-1}^1 (P(x) - P_f(x))dx \right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{2}{n+2} \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i (P(x_i) - P_f(x_i)) \right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{2}{n+2} \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i (f(x_i) - R_n(x)x_i^{n+1} - f(x_i)) \right| + \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{2}{n+2} \\ &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left(\sum_{i=0}^n |\lambda_i| + \frac{2}{n+2} \right) \end{aligned}$$

b) Recommençons la même argumentation avec $f \in C^{n+2}$. Il existe $R_{n+1}(x)$ tel que, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x)x^{n+2} = P(x) + a_{n+1}x^{n+1} + R_{n+1}(x)x^{n+2}$$

Donc, par la question 3. :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \right| &\leq \left| \int_{-1}^1 (P(x) + a_{n+1}x^{n+1} - P_f(x)) dx \right| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} \frac{2}{n+3} \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i (P(x_i) - P_f(x_i)) \right| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} \frac{2}{n+3} \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^n \lambda_i (f(x_i) - R_{n+1}(x)x_i^{n+2} - f(x_i)) \right| + \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} \frac{2}{n+3} \\ &\leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} \left(\sum_{i=0}^n |\lambda_i| + \frac{2}{n+3} \right) \end{aligned}$$

5. a) Puisque les calculatrices sont autorisées, voici un programme, écrit pour la TI-89/92, qui calcule les polynômes de Lagrange :

```

lagr(x,w)      (x : liste des points, w : variable)
Func
Local i,j,p,r
{} →r
For j,1,dim(x)
1→p
For i,1,dim(x)
If i≠j Then
(w-x[i])/(x[j]-x[i])*p→p
EndIf
EndFor
augment({p},r)→r
EndFor
r
EndFunc

```

et $\int(\text{lagr}(\{1, -1/2, 0, 1/2, 1\}, x), x, -1, 1)$ donne : $(7/45, 32/45, 4/15, 32/45, 7/45)$.

b) Il vient :

$$\left| \int_{-1}^1 e^{(x/4)^2} - \sum_{i=0}^4 \lambda_i e^{(x_i/4)^2} \right| \leq \frac{M_6}{6!} \left(\sum_{i=0}^4 |\lambda_i| + \frac{2}{7} \right) = \frac{16M_6}{7 \times 720}$$

Une étude rapide de la fonction $x \mapsto e^{(x/4)^2}$ donne $M_6 = \frac{10681e^{1/16}}{262144} \approx 0.043$, soit une majoration de l'ordre de $2 \cdot 10^{-4}$. Ainsi, $\sum_{i=0}^4 \lambda_i e^{(x_i/4)^2} \approx 2.04246168756$ n'est pas une trop mauvaise approximation de $\int_{-1}^1 e^{(x/4)^2} dx \approx 2.0424596851536$ donné par la calculatrice.

Deuxième partie

6. a) L'application $P \rightarrow |L(P)|$ est continue. La boule unité fermée B d'un evn de dimension finie étant compacte, $\sup_{P \in B} |L(P)|$ existe et est atteint.

Supposons que le sup soit atteint en Q tel que $N(Q) < 1$. Posons $Q_1 = \frac{Q}{N(Q)}$. Alors $N(Q_1) = 1$ et :

$$|L(Q_1)| = \frac{|L(Q)|}{N(Q)} = \frac{\mathcal{N}(L)}{N(Q)} > \mathcal{N}(L)$$

Contradiction.

b) Pour tout $P \in E : \frac{|L(P)|}{N(P)} \leq K$. Par définition du sup, $\mathcal{N}(L) \leq K$. S'il existe Q tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = K$, alors le sup est atteint.

7. Si $P(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$, alors :

$$N_\infty(P) \leq N_2(P) \leq \sqrt{n+1} N_\infty(P)$$

On ne peut obtenir mieux. Pour $P(x) = x^p$, on a égalité dans la première inégalité, et pour $P(x) = \sum_{p=0}^n x^p$, on a égalité dans la seconde inégalité.

8. a) Posons $Q(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$. Alors :

$$|L(Q)| = \left| 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1} \right| \leq \left(2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2p+1} \right) N_\infty(Q)$$

Ainsi $\mathcal{N}_\infty(L) \leq 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2p+1}$. On a égalité avec $Q(x) = \sum_{p=0}^n x^p$.

b) De même, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|L(Q)| = \left| 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1} \right| \leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} N_2(Q)$$

Ainsi $\mathcal{N}_2(L) \leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2}$. On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si

$a_{2p} = \frac{\lambda}{2p+1}$. Il reste à choisir λ de façon à ce que $\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{|\lambda|^2}{(2p+1)^2} = 1$ et le polynôme $Q(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p} x^{2p}$.

Troisième partie

9. a) Il suffit de prendre $P_k(x) = \sum_{p=0}^k x^p$. On a $N_\infty(P_k) = 1$ et $|L(P_k)| = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2}{2p+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

b) L'application L n'est pas continue puisqu'on a trouvé une suite de polynômes (P_k) sur la sphère unité tels que $\lim_{k \rightarrow +\infty} L(P_k) = \infty$.

10. a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si $P(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p$:

$$\begin{aligned} |L(P)| &= 2 \left| \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a_{2p}}{2p+1} \right| \\ &\leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq N_2(P) \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(on utilise $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$). Ainsi $|||L|||$ existe et $|||L||| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

b) Montrons que $|||L||| = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $P_n(x) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\lambda_n x^{2p}}{2p+1}$ tel que $N_2(P_n) = 1$. On a alors égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et :

$$|L(P_n)| = 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Supposons qu'il existe $Q(x) = \sum_{p=0}^q a_p x^p$ polynôme tel que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = |L(Q)| &\leq 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq N_2(Q) \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On a donc égalité dans toutes ces inégalités. Donc $a_{2p} = \frac{\lambda}{2p+1}$ et

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2 \left(\sum_{p=0}^{\lfloor q/2 \rfloor} \frac{1}{(2p+1)^2} \right)^{1/2}$$

ce qui est impossible puisque $\frac{1}{(2p+1)^2} > 0$.