CENTRALE PC 2000 ÉPREUVE DE MATH 2

Première partie

I. A. 1. La fonction $x \mapsto px - kx^2 = x(p-kx)$ présente un maximum pour toute valeur de p au point d'abscisse $x = \dfrac{p}{2k}$ et il vaut $\dfrac{p^2}{2k}$.

Conclusion : $J(f) = \mathbb{R}$ et $g(p) = \dfrac{p^2}{4k}$. Le tracé de la courbe donne une simple parabole.

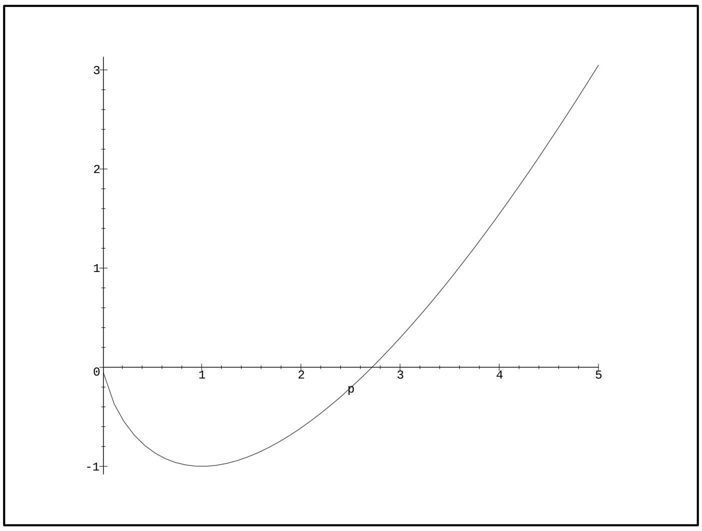
2. Soit $h(x) = px - e^x$, $h'(x) = p - e^x$.
   - Si $p < 0$ alors h ne présente pas d'extremum.
   - Si $p = 0$ alors h est majorée par 0 ($\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$).
   - Si $p > 0$ alors h présente un maximum pour $x = \ln p$ et il vaut $p(\ln p - 1)$.

Conclusion : $J(f) = [0, +\infty[$ et $g(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ p(\ln p - 1) & \text{si } p > 0 \end{cases}$. On remarque que g est continue en 0.

Étude de g : $g'(p) = \ln p$ d'où

p	0		1		$+\infty$
g'	$-\infty$	$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ce qui donne le tracé suivant (la tangente en 0 est verticale)



3. La fonction $h(x) = px - \operatorname{Arctan} x$ est impaire.
   - Si $p \neq 0$ alors elle n'est pas majorée.
   - Si $p = 0$ alors elle est majorée par $\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion : $J(f) = \{0\}$ et $g(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

B. 1. Soient a et b deux éléments de $J(f)$ et $t \in [0,1]$ alors, pour tout x de I, on écrit

$$\begin{aligned} &ax - f(x) \le g(a) && \times t \\ &bx - f(x) \le g(b) && \times(1-t) \end{aligned}$$

d'où, en additionnant ces inégalités avec le multiplicateur mentionné, on obtient

$$[ta + (1-t)b]x - f(x) \le tg(a) + (1-t)g(b) \tag{1}$$

ce qui signifie que $x \mapsto [ta + (1-t)b]x - f(x)$ est majoré sur I et donc que $ta + (1-t)b \in J(f)$ et en conclusion $J(f)$ est bien un intervalle.

2. Grâce à l'inégalité (1), on tire immédiatement l'inégalité

$$g(ta + (1-t)b) \le tg(a) + (1-t)g(b)$$

ce qui permet de dire que g est convexe.

3. a) Montrons que g est croissante. Supposons que $a < b$ alors $ax - f(x) \le bx - f(x)$ car $x \ge 0$. Cette inégalité étant vraie pour tout x de I, par passage à la borne supérieure (qui existe dans $\mathbb{R}$) on a

$$g(a) \le g(b)$$

donc g est croissante (au sens large).

b) De même on prouve ici que g est décroissante.

C. 1. Soit $h(x) = px - f(x)$, h est de classe $\mathcal{C}^2$ et $h'(x) = p - f'(x)$, $h''(x) = -f''(x) < 0$. f' est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Si $I = (a,b)$ (intervalle noté de cette façon car on ne sait pas s'il contient ses bornes) et si $p \in]\alpha, \beta[$ on obtient le tableau de variation suivant :

x	a		$x(p)$		b
h''			$-$		
h'	$p-\alpha$	$\searrow$	0	$\searrow$	$p-\beta$
h		$\nearrow$	$h(x(p))$	$\searrow$	

où $x(p)$ désigne le seul élément de l'intervalle I tel que $p = f'(x(p))$.
Conclusions : $p \in J(f)$ donc $]\alpha, \beta[\subset J(f)$ et, le maximum de h étant atteint en $x(p) = f'^{[-1]}(p)$, on a

$$g(p) = pf'^{[-1]}(p) - f(f'^{[-1]}(p)).$$

2. f' est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, $x(p) = f'^{[-1]}(p)$ est dérivable donc la relation $p = f'(x(p))$ donne $1 = f''(x(p))x'(p)$ d'où

$$g'(p) = x(p) + p\frac{1}{f''(x(p))} - \frac{f'(x(p))}{f''(x(p))} = x(p).$$

3. Comme $f'(x(p)) = p$, la pente de la tangente au point $(x(p), f(x(p)))$ vaut p. Or $px(p) - f(x(p)) = g(p)$ par définition de g donc l'équation de la tangente en ce point admet l'équation

$$\begin{aligned} y - f(x(p)) = p(x - x(p)) &= px - px(p) \\ &= px - [px(p) - f(x(p))] - f(x(p)) \\ &= px - g(p) - f(x(p)) \end{aligned}$$

par conséquent la droite D_p est tangente au graphe de la fonction f.

4. a) Soit $f \in \mathcal{H}$, montrons que $g \in \mathcal{H}$.

- On a vu que $J(f)$ contient l'intervalle $]\alpha, \beta[$ avec ici $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$ donc $J(f) = \mathbb{R}$.

- g est définie sur $\mathbb{R}$ et $g'(p) = x(p) = f'^{[-1]}(p)$. Or f' est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme car $f'' > 0$ donc g' est de classe $\mathcal{C}^1$ et par conséquent g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- On a vu en outre que $x'(p) = \dfrac{1}{f''(x(p))} > 0$ donc $g''(p) = x'(p) > 0$.
- Finalement, comme f' est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ on sait que $f'^{[-1]}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et en conclusion $g'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) On a donc

$$\forall (x,p) \in \mathbb{R}^2,\ px - f(x) \leq g(p)$$

ce qui s'écrit $px - g(p) \leq f(x)$ donc $f \geq \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$.
Mais, vu que $px(p) - g(p) = f(x(p))$ alors $f \leq \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$.
Conclusion : $f = \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$ soit $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.

c) $\mathcal{L}$ est involutive donc $\mathcal{L}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ et, en composant par $\mathcal{L}$, on a

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

soit $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ donc $\mathcal{L}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$.

Deuxième partie

II. 1. On sait que A est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. e_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_i > 0$, $Ae_i = \lambda_i e_i$ (en confondant la matrice A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé). Si $p = \sum_{i=1}^{n} q_i e_i$ alors

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (q_i y_i - \lambda_i y_i^2).$$

On se sert alors du résultat du I.A.1 ; chaque fonction $f_i(y_i) = q_i - \lambda_i y_i^2$ est majorée par $\dfrac{q_i^2}{4\lambda_i}$ (les λ_i sont > 0) et le maximum est atteint pour $y_i = \dfrac{q_i}{2\lambda_i}$ donc F est majoré par

$$M = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{4\lambda_i}$$

et cette valeur est atteinte pour $x = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{q_i}{\lambda_i} e_i$.

2. On vient de voir que

$$g(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{4\lambda_i} = {}^tP \frac{1}{4} A^{-1} P$$

(car A est inversible), on prend donc $B = \dfrac{1}{4} A^{-1}$.
Pour montrer que $h = f$ (ce qui est en accord avec le résultat de la question I.C.4.b.) il suffit de remarquer que $4AB = I_n$ relation qui est symétrique en A et B.

3. a) Évident car f est une forme quadratique.
   b) On a

$$f(tp) = f(tp_1, \ldots, tp_n) = t^2 f(p_1, \ldots, p_n)$$

d'où, en dérivant par rapport à t,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(tp) = 2tf(p)$$

et on obtient la formule annoncée en prenant $t = 1$.

4. On a vu au II.1. que $x(p) = \dfrac{1}{2}A^{-1}P$ et on cherche un résultat analogue à celui de la question I.C.2. soit $x(p) = \operatorname{grad} g(p)$ ce qui est alors immédiat.

Troisième partie

III. A. 1. On écrit les égalités

$$\begin{aligned}
F(tx_1 + (1-t)x_2) &= {}^tP(tX_1 + (1-t)X_2) - {}^t(tX_1 + (1-t)X_2)A(tX_1 + (1-t)X_2) \\
&= t\,{}^tPX_1 + (1-t)\,{}^tPX_2 - t^2.\,{}^tX_1AX_1 - t(1-t).\,{}^tX_1AX_2 \\
&\qquad - t(1-t).\,{}^tX_2AX_1 + (1-t)^2.\,{}^tX_2AX_2 \\
&= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t).\,{}^tX_1AX_1 - t(1-t).\,{}^tX_1AX_2 \\
&\qquad + t(1-t).\,{}^tX_2AX_2 - t(1-t).\,{}^tX_2AX_1 \\
&= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t).\,{}^tX_1A(X_1 - X_2) + t(1-t).\,{}^tX_2A(X_2 - X_1) \\
&= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t).\,{}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)
\end{aligned}$$

(i) Soit $(x_1, x_2) \in M^2$, on sait que ${}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \geq 0$ car la matrice A est symétrique positive, que $F(x_1) = F(x_2) = \sup\limits_{y \in C} F(y)$ par conséquent, pour tout $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $t \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned}
F(x) &= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + t(1-t).\,{}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \\
&\geq tF(x_1) + (1-t)F(x_2) = F(x_1)
\end{aligned}$$

car $t(1-t).\,{}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) \geq 0$. Or $x \in C$ car C est convexe ce qui, en conclusion permet de dire que $F(x) = F(x_1)$ soit $x \in M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Finalement M est convexe.
Si M est vide, M est quand même convexe mais l'intérêt semble limité ici.

B. 1. On peut dire que A est la matrice d'un produit scalaire et utiliser l'équivalence des normes en dimension finie mais il est plus simple ici de diagonaliser A dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ et de prendre $k = \min\{\lambda \in^(A)\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
{}^tXAX &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \\
&\geq k \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = k\,{}^tXX.
\end{aligned}$$

2. Grâce au résultat précédent on a

$$F(x) \leq {}^tPX - k\,{}^tXX = < p, x > -k\|x\|^2.$$

Lorsque $\|x\| \to +\infty$ alors $F(x) \to -\infty$ et en conséquence, en prenant $x_0 \in C$ quelconque et en posant $D = \{x \in C \mid F(x) \geq F(x_0)\}$ alors D est borné. D est aussi fermé (image réciproque du fermé $[F(x_0), +\infty[$ par l'application continue F). D est compact donc F est borné sur D et atteint sa borne supérieure.
Conclusion : comme la borne supérieure de F sur D est égale à la borne supérieure de F sur C alors M est non vide.

C. 1. La principale justification du calcul suivant tient à l'égalité ${}^tX_1AX_2 = {}^tX_2AX_1$ qui est une conséquence de l'hypothèse A symétrique. On utilise aussi la question III.A.1.

$$\begin{aligned}F(x)-F(x_2) &= -tF(x_2)+tF(x_1)+(t-t^2).\,{}^t(X_1-X_2)A(X_1-X_2)\\ &= t(-\,{}^tPX_2+\,{}^tX_2AX_2+\,{}^tPX_1-\,{}^tX_1AX_1\\ &\qquad\qquad +t.\,{}^t(X_1-X_2)A(X_1-X_2)-t^2.\,{}^t(X_1-X_2)A(X_1-X_2)\\ &= -t^2.\,{}^t(X_1-X_2)A(X_1-X_2)\\ &\qquad +t.[\,{}^tP(X_1-X_2)+\,{}^tX_2AX_2-\,{}^tX_2AX_1-\underbrace{{}^tX_1AX_2}_{=\,{}^tX_2AX_1}+\,{}^tX_2AX_2]\\ &= -t^2.\,{}^t(X_1-X_2)A(X_1-X_2)+t.\,{}^t(P-2AX_2)(X_1-X_2).\end{aligned}$$

2. ($\Rightarrow$) si $x_2 \in M$ alors, pour tout $x_1 \in C$, pour tout $t \in]0,1]$, on a

$$F(x)-F(x_2)=t[-t.\,{}^t(X_1-X_2)A(X_1-X_2)+\,{}^t(P-2AX_2)(X_1-X_2)]\leq 0$$

soit, en simplifiant par $t>0$, ${}^t(X_1-X_2)A(X_1-X_2)+\,{}^t(P-2AX_2)(X_1-X_2)\geq 0$ et en prenant la limite lorsque $t\to 0$, on obtient ${}^t(P-2AX_2)(X_1-X_2)\geq 0$.
($\Leftarrow$) implication immédiate, il suffit de prendre $t=1$. En effet, en posant $Y=X_1$ et $X=X_2$ dans l'égalité du III.C.1, on aura pour tout $y\in C$,

$$F(y)-F(x)=t[-t.\,{}^t(Y-X)A(Y-X)+\,{}^t(P-2AX)(Y-X)]\leq 0.$$

Interprétation : on sait que $P-2AX=\operatorname{grad} f(x)$ donc on a $<\operatorname{grad} f(x), y-x>\leq 0$ ce que l'on peut encore traduire par $\begin{cases}\operatorname{grad} f(x)=0 & \text{si } x\in \overset{\circ}{C}\\ <\operatorname{grad} f(x),y-x>\leq 0 & \text{si } x\in \operatorname{Fr}(C)\end{cases}$.

D. 1. Ici C est fermé borné donc compact car $\mathbb{R}^n$ est un espace de dimension finie. F est continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
On peut prendre comme exemple $F(x)=x_1-x_1^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $C=[0,1]^2$. $M=\{1/2\}\times[0,1]$ contient une infinité d'éléments.

2. Immédiat en utilisant la continuité des applications linéaires en dimension finie.

3. a) $f(x)=\,{}^t(2AU_m-P)X$ est une application continue, f atteint son minimum sur C compact pour un vecteur v_m donc

$$\forall x\in C,\ {}^t(2AU_m-P)V_m\leq\,{}^t(2AU_m-P)X.$$

b) On sait que $\|V_m-U_m\|\leq 2R$ et que

$$\begin{aligned}\|P-2AU_m\| &\leq \|P\|+2\|AU_m\|\\ &\leq \|P\|+2\alpha\|U_m\|\leq\|P\|+2\alpha R\end{aligned}$$

donc, grâce à Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}{}^t(P-2AU_m)(V_m-U_m) &\leq \|P-2AU_m\|.\|V_m-U_m\|\\ &\leq 2R(\|P\|+2\alpha R)<r\end{aligned}$$

et par conséquent $t_m<1$.
Enfin, grâce à l'inégalité du a) en prenant $X=U_m$, on a $t_m\geq 0$.
Conclusion : $t_m\in[0,1[$.

c) On écrit que $u_{m+1}=t_mv_m+(1-t_m)u_m$, u_m et v_m étant dans l'ensemble convexe C alors $u_{m+1}\in C$.

Les suites (u_m), (v_m) et (t_m) sont en effet définies (de manière non unique) par les relations i), ii) et iii). En effet, par récurrence, si on connaît u_m alors i) permet de “connaître” v_m, ii) permet de calculer t_m et enfin iii) permet de déterminer u_{m+1}. La connaissance de $u_0 \in C$ permet d'amorcer cette récurrence.

4. On reprend la formule du III.C.1 avec $X_2 = U_m$, $X_1 = V_m$ alors
$$X = t_m V_m + (1 - t_m)U_m = U_m + t_m(V_m - U_m) = U_{m+1}$$
d'où
$$F(u_{m+1}) - F(u_m) = -t_m^2 . {}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m) + t_m \underbrace{{}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m)}_{=rt_m}$$
$$= t_m^2[r - {}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m)].$$
Or ${}^t(V_m - U_m)A(V_m - U_m) \leq \|V_m - U_m\|\alpha\|V_m - U_m\| \leq 4\alpha R^2$ et, par conséquent
$$F(u_{m+1}) - F(u_m) \geq t_m^2(r - 4\alpha R^2) \geq 0$$
donc la suite $(F(u_m))$ est croissante et majorée elle converge.
On a même un peu mieux, en effet $F(u_{m+1}) - F(u_m) \geq t_m^2(r - 4\alpha R^2) \geq 2\alpha R^2 t_m^2$ donc $t_m \to 0$.
Par Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (u_m, v_m) une suite convergente vers (u, v) dans C^2. En passant à l'inégalité dans la relation i) on obtient
$$\forall x \in C,\ {}^t(2AU - P)V \leq {}^t(2AU - P)X.$$
Par ailleurs, on a $t_m = \dfrac{1}{r}.{}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m) \to 0$ donc
$${}^t(P - 2AU)(V - U) = 0$$
soit, en exploitant les deux derniers résultats
$$\forall x \in C,\ {}^t(2AU - P)U \leq {}^t(2AU - P)X$$
et la caractérisation du III.C.2 permet de conclure que $u \in M$.