

00 MATH. I-MP J.1032 Sujet mis à la disposition des concours : ENSAE (statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie MATHÉMATIQUES I-MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude d'endomorphismes définis par l'action d'un groupe sur un espace vectoriel de matrices complexes.

Soit M l'ensemble des matrices complexes m d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme suivante : $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$.

Dans cette relation a et b sont des nombres complexes, i vérifie $i^2 = -1$, \bar{a} (resp. \bar{b}) est le nombre complexe conjugué de a (resp. b).

Partie préliminaire

(0) L'ensemble M est un espace vectoriel réel.

Démontrer qu'en munissant l'ensemble M de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un réel, l'ensemble M est un espace vectoriel réel. Préciser sa dimension.

Démontrer que le produit de deux matrices m_1 et m_2 de l'espace M appartient à M .

Soit I la matrice unité d'ordre 2. Soit m une matrice appartenant à l'espace vectoriel M ; La matrice transposée de la matrice m est notée ${}^t m$. Si p est un entier naturel, m^p , est le produit de la matrice m p -fois par elle-même ; classiquement $m^0 = I$.

Soit G le sous ensemble des matrices g appartenant à l'espace M dont le déterminant est égal à 1 : $G = \{g \in M \mid \det(g) = 1\}$.

Il est admis que l'ensemble G est pour le produit des matrices, un groupe.

Soit U le sous ensemble des matrices u de M antisymétriques dont le carré est égal à l'opposé de la matrice identité : $U = \{u \in M \mid u + {}^t u = 0, u^2 = -I\}$.

Soit V le sous ensemble des matrices symétriques v appartenant à l'espace M . $V = \{v \in M \mid v = {}^t v\}$.

Il est admis que le sous ensemble V de M est un sous espace vectoriel réel.

Soient m_1 et m_2 deux matrices appartenant à l'espace vectoriel M ; il est admis que la trace de la matrice $\overline{m_1} \cdot {}^t m_2$ est réelle ; soit $(m_1 \mid m_2)$ le réel défini par la relation suivante : $(m_1 \mid m_2) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\overline{m_1} \cdot {}^t m_2) = \frac{1}{2} \text{Tr}(m_1 \cdot {}^t \overline{m_2})$.

L'égalité entre les traces des matrices $\overline{m_1} \cdot {}^t m_2$ et $m_1 \cdot {}^t \overline{m_2}$ est admise.

Il est admis que l'espace $(M, (\cdot, \cdot))$ est un espace euclidien. Si le produit scalaire $(m_1 \mid m_2)$, de deux matrices $(m_1$ et $m_2)$, est nul, ces matrices sont dites perpendiculaires. Le sous espace vectoriel V de M est un espace euclidien lorsqu'il est muni du produit scalaire induit par celui de M .

Première partie

(I.1) Propriétés élémentaires des matrices de l'espace M : Soit m une matrice de l'espace M ; démontrer que les matrices $m + {}^t \overline{m}$ et $m \cdot {}^t \overline{m}$ s'expriment au moyen de la matrice identité I , du déterminant $\det(m)$, de la trace $\text{Tr}(m)$ de la matrice m .

Soit g une matrice appartenant à M ; déduire du résultat précédent que, pour qu'une matrice g de l'espace M appartienne au groupe G il faut et il suffit qu'il existe une relation simple entre les matrices g^{-1} et ${}^t \overline{g}$.

Soit m une matrice de l'espace M dont la trace est nulle ($\text{Tr}(m) = 0$) ; établir la relation : $m = -{}^t \overline{m}$; Calculer les matrices m^2 , $({}^t m)^2$ en fonction du déterminant de la matrice m et de la matrice unité I .

(I.2) Matrices u :

Déterminer les matrices u qui appartiennent à l'ensemble U défini ci-dessus.

Soit m une matrice de l'espace M , u une matrice de l'ensemble U . Comparer les deux produits de matrices : $m \cdot u$ et $u \cdot \overline{m}$. Démontrer que lorsque la trace de la matrice m est nulle ($\text{Tr}(m) = 0$), les deux matrices $m \cdot u$ et $u \cdot m$ appartiennent au sous-espace vectoriel V .

(I.3) Norme d'une matrice m :

Soit m une matrice de l'espace M ; calculer la norme de la matrice m ($\|m\| = \sqrt{|m|}$) en fonction du déterminant de cette matrice. Comparer pour deux matrices m et w de l'espace M la norme $\|m.w\|$ du produit des matrices m et w avec le produit $\|m\|.\|w\|$ des normes de ces matrices.

(I.4) Matrices appartenant à G :

(a) Démontrer que toute matrice g appartenant au groupe G s'écrit de manière unique sous la forme $g = I \cos \theta + m$, où θ est un réel appartenant au segment $[0, \pi]$ et m une matrice de trace nulle ($Tr(m) = 0$) qui appartient à M .

Calculer en fonction du réel θ , le déterminant de la matrice m , ainsi définie à partir de la matrice g , ainsi que le carré m^2 de la matrice m .

(b) Soit m une matrice de l'espace M différente de 0 ($m \neq 0$) : démontrer que la matrice g_1 définie par la relation ci-dessous appartient au groupe G : $g_1 = \frac{1}{\sqrt{|m|}}m$.

(I.5) Un sous-groupe de G :

Soit g_1 une matrice de trace nulle ($Tr(g_1) = 0$), appartenant à G ; soit $G(g_1)$ l'ensemble des matrices m_θ définies par la relation suivante $m_\theta = I \cos \theta + g_1 \sin \theta$ où θ est un réel quelconque appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit : $G(g_1) = \{m_\theta = I \cos \theta + g_1 \sin \theta | \theta \in [0, 2\pi]\}$.

(a) Démontrer que l'ensemble $G(g_1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe G .

(b) Soit m une matrice de l'espace M ; la matrice exponentielle de la matrice m est définie par la relation $exp(m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} m^n$. Calculer la matrice $exp(\theta.g_1)$.

Deuxième partie

Cette partie est consacrée à l'étude d'une application définie dans le sous-espace vectoriel V des matrices symétriques de M à l'aide du groupe G .

Dans toute cette partie, g est une matrice donnée du groupe G , de trace nulle ($Tr(g) = 0$) ; étant donnée une matrice w appartenant au sous-espace V soit $l_g(w)$ la matrice définie par la relation suivante : $l_g(w) = g.w + w.t.g$.

(II.1) L'endomorphisme l_g de V :

(a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel V de l'espace vectoriel M . Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

(b) Démontrer que l'application $l_g : w \mapsto l_g(w)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V . Démontrer que cet endomorphisme l_g n'est pas nul.

(II.2) Propriétés de l'endomorphisme l_g :

(a) Comparer l'endomorphisme $l_g \circ l_g : w \mapsto l_g(l_g(w))$ à l'endomorphisme $w \mapsto 2g.l_g(w)$.

Calculer l'expression $l_g(g.l_g(w))$ en fonction de $l_g(w)$.

Comparer les deux normes $\|l_g(w)\|$ et $\|g.l_g(w)\|$.

Calculer pour une matrice u de l'ensemble U , l'expression $l_g(g.u)$.

(b) Déterminer une relation simple qui lie, pour deux matrices quelconques v et w de l'espace V , les produits scalaires $(l_g(v)|w)$ et $(v|l_g(w))$.

En déduire l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme l_g .

(c) Déduire des résultats précédents, que pour toute matrice w de V , les matrices $l_g(w)$ et $g.l_g(w)$; sont perpendiculaires.

(II.3) Une base de l'espace V :

Étant donnée une matrice v de l'espace vectoriel V telle que son image par l'endomorphisme l_g soit différente de 0 ($l_g(v) \neq 0$), une matrice u de l'ensemble U (u appartient à M , est antisymétrique, $u^2 = -I$), soient h_0 le produit des matrices g et u , h_1 l'image de la matrice v par l'application l_g , h_2 le produit des matrices g et h_1 : $h_0 = g.u$, $h_1 = l_g(v)$, $h_2 = g.l_g(v)$.

(a) Calculer les produits scalaires de la matrice u avec chacune des matrices h_i , $0 \leq i \leq 2$, et des matrices h_i , $0 \leq i \leq 2$, deux à deux : $(u|h_i)$, $0 \leq i \leq 2$, $(h_k|h_l)$, $0 \leq k \leq l \leq 2$.

(b) Démontrer que la suite des matrices h_i , $0 \leq i \leq 2$, est une base de l'espace vectoriel V . Dédire de cette base une base orthonormée. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme l_g dans cette base ? Déterminer la transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\frac{1}{2}l_g$.

(II.4) Un endomorphisme de l'espace vectoriel M :

Soit θ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit m_θ la matrice appartenant au groupe G (question I-5) définie par la relation suivante : $m_\theta = I \cos \theta + g \sin \theta$.

Soit s_θ l'application qui à une matrice w de l'espace vectoriel M , associe la matrice $m_\theta.w$: $s_\theta : w \mapsto m_\theta.w$. Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme s_θ dans la base définie par les matrices u, h_0, h_1, h_2 .

Troisième partie

Soit m une matrice donnée de l'espace vectoriel M . À toute matrice w du sous-espace vectoriel V de M est associée la matrice $m.w.tw$.

(III.1) Endomorphisme ψ_m de l'espace V :

(a) Démontrer que l'application $w \mapsto m.w.tm$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel V . L'endomorphisme $w \mapsto m.w.tm$ de V est noté ψ_m .

Calculer $m.u.tm$ où u est une matrice de l'ensemble U .

(b) Déterminer les matrices m de l'espace vectoriel M pour lesquelles l'application ψ_m est l'application identité.

(III.2) Endomorphisme ψ_g :

Soit g une matrice différente des matrices I (identité) et $-I$, appartenant au groupe G .

(a) Démontrer, à l'aide de la question I-4, qu'il existe un réel θ appartenant à l'intervalle ouvert $]0, \pi[$ et une matrice m appartenant à M , différente de 0, de trace nulle, telle que la relation ci dessous soit vérifiée : $g = I \cos \theta + m$; $\theta \in]0, \pi[$, $m \in M$.

Soit γ la matrice définie à partir de la matrice m par la relation suivante : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\det m}}m$.

(b) Exprimer pour toute matrice w de l'espace vectoriel V , la matrice $\psi_g(w)$ en fonction des matrices $w, l_\gamma(w), \psi_\gamma(w)$ et du réel θ .

(c) Soit v une matrice de l'espace vectoriel V telle que son image par l'application l_γ soit différente de 0 ($l_\gamma(v) \neq 0$). D'après la question II-3.b, la famille $\gamma.u, l_\gamma(v), \gamma.l_\gamma(v)$ est une base de l'espace vectoriel V . Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme ψ_g dans cette base. Calculer le déterminant de cette matrice noté $\det \psi_g$. Caractériser la transformation géométrique définie par l'endomorphisme ψ_g .

(III.3) Endomorphisme ψ_m :

Soit m une matrice différente des matrices $0, I$ et $-I$, appartenant à l'espace vectoriel M . Démontrer qu'il existe une matrice g appartenant au groupe G telle que l'endomorphisme ψ_m soit proportionnel à l'endomorphisme ψ_g . En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme ψ_m .

FIN DU PB Mines Mp1 2000