

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000
MATHÉMATIQUES

**PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIERE PC**

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$). Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$. A un vecteur X de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$, est associée la matrice $V(X)$ dont les éléments $V(X)_{p,q}$, $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, sont définis par la relation :

$$V(X)_{p,q} = (x_p)^{q-1}.$$

Le déterminant $v(X)$ de la matrice $V(X)$ est un déterminant de Van der Monde ; il est admis que sa valeur est donnée par la relation suivante :

$$v(X) = \det(V(X)) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (x_q - x_p).$$

Il est admis que l'application $\| \cdot \|$ de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$X \mapsto \|X\| = \sup_{1 \leq p \leq n} |x_p|,$$

est une norme. Soit E_n l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|)$.

Le but du problème est de montrer qu'à cette application v de E_n dans $\mathbb{C}$ peut être associé un réel ρ tel que, pour tout vecteur X de E_n la relation suivante a lieu :

$$|v(X)| \leq \rho \|X\|^{n(n-1)/2},$$

où le réel ρ est une valeur prise pour un vecteur unitaire particulier W :

$$\rho = |v(W)|, \text{ avec : } \|W\| = 1.$$

1) Définition du réel ρ :

L'entier n est fixé ($n \geq 2$).

- a) Comparer pour tout vecteur X de l'espace vectoriel normé E_n et tout nombre complexe λ les deux expressions $v(\lambda X)$ et $v(X)$.

En particulier, étant donné un vecteur X de E_n , soit Y un vecteur de E_n de norme unité vérifiant la relation : $X = \|X\| Y$; exprimer le nombre complexe $v(X)$ en fonction de $v(Y)$ et de $\|X\|$.

- b) Démontrer que l'application v de l'espace vectoriel normé E_n dans $\mathbb{C}$ est continue. En déduire que l'application continue $X \mapsto |v(X)|$ admet un maximum sur la sphère unité S ,

$$S = \{X \in E_n \mid \|X\| = 1\},$$

atteint pour au moins un vecteur W . Soit ρ le maximum de cette fonction sur la sphère unité :

$$\rho = \max_{\|X\|=1} |v(X)|.$$

c) Démontrer les deux relations :

- i. pour tout vecteur X de E_n , $|v(X)| \leq \rho \|X\|^{n(n-1)/2}$;
- ii. il existe au moins un vecteur unitaire W de E_n tel que

$$|v(W)| = \rho.$$

2) **Cas $n = 2$:**

Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_2 \mid \|X\| = 1\}.$$

Déterminer le maximum ρ de la fonction $X \mapsto |v(X)|$ sur la sphère unité. Démontrer que les vecteurs unitaires qui rendent maximum $|v(X)|$ sont proportionnels à un même vecteur X_1 dont la première coordonnée est égale à 1. Les déterminer.

3) **Cas $n = 3$:**

a) Etant donnés trois réels positifs ou nuls t_1, t_2 et t_3 , ($t_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3$) démontrer l'inégalité suivante

$$t_1.t_2.t_3 \leq \frac{1}{27}(t_1 + t_2 + t_3)^3.$$

Démontrer que l'égalité a lieu si et seulement si les trois réels t_1, t_2, t_3 sont égaux.

b) Etant donnés trois nombres complexes x_1, x_2 et x_3 , soient A, B et C les trois fonctions des variables x_1, x_2 et x_3 définies par les relations suivantes :

$$A = |x_1 - x_2|^2 + |x_2 - x_3|^2 + |x_3 - x_1|^2 ; B = \sum_{k=1}^3 |x_k|^2 ; C = \left| \sum_{k=1}^3 x_k \right|^2.$$

Démontrer que A est une combinaison linéaire de B et de C .

c) Caractériser les vecteurs qui appartiennent à la sphère unité S :

$$S = \{X \in E_3 \mid \|X\| = 1\}.$$

d) Calculer, pour un vecteur X quelconque de l'espace E_3 , l'expression $|v(X)|^2$. En déduire une majoration de ρ . Déterminer les équations que vérifient les coordonnées x_1, x_2 et x_3 d'un vecteur W unitaire rendant $|v(W)|$ maximum. Exhiber une solution à l'aide des racines cubiques de l'unité. En déduire le réel ρ .

4) **Une minoration du réel ρ :**

Soit Ω le vecteur unitaire dont les coordonnées $\omega_p, 1 \leq p \leq n$, sont définies par la relation :

$$\omega_p = e^{2i(p-1)\pi/n} = \exp\left(\frac{2i(p-1)\pi}{n}\right).$$

a) $V(\Omega)$ est la matrice définie à partir du vecteur Ω ; $\overline{V(\Omega)}$ est la matrice complexe conjuguée. Démontrer que la matrice produit $\overline{V(\Omega)}V(\Omega)$ est une matrice proportionnelle à la matrice identité.

b) En déduire la valeur du module $|v(\Omega)|$ du déterminant de la matrice $V(\Omega)$ et une minoration du réel ρ .

5) **Une inégalité de Hadamard :**

Dans cette question, il est admis que l'application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ qui, à deux vecteurs $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ fait correspondre le nombre complexe $\langle X, Y \rangle$, défini par la relation suivante

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i,$$

est un produit scalaire hermitien. Soit F_n l'espace préhilbertien $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

La norme déduite de ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|_2$; elle est définie par la relation :

$$\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Etant donnée une suite de n vecteurs indépendants $V_1, V_2, \dots, V_n$ de l'espace préhilbertien F_n , soit $M(V_1, V_2, \dots, V_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$.

- a) Déterminer, lorsque les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$ sont deux à deux orthogonaux, le produit B de la matrice transposée de la matrice complexe conjuguée de la matrice $M(V_1, V_2, \dots, V_n)$ avec la matrice $M(V_1, V_2, \dots, V_n)$:

$$B = {}^t \overline{M(V_1, V_2, \dots, V_n)} \cdot M(V_1, V_2, \dots, V_n).$$

Que vaut le module du déterminant de la matrice $M(V_1, V_2, \dots, V_n)$?

- b) Soit $U_1, U_2, \dots, U_n$ les vecteurs de l'espace F_n définis de la manière suivante :
- $U_1 = V_1$,
 - $U_2 = V_2 - \text{proj}_1(V_2)$; $\text{proj}_1(V_2)$ est le vecteur projection du vecteur V_2 sur la droite vectorielle engendrée par V_1 ,
 - pour tout entier i compris entre 3 et n ($3 \leq i \leq n$) : $U_i = V_i - \text{proj}_{i-1}(V_i)$; $\text{proj}_{i-1}(V_i)$ est le vecteur projection du vecteur V_i sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_{i-1}$.
- Démontrer l'égalité entre les déterminants des deux matrices $M(V_1, V_2, \dots, V_n)$ et $M(U_1, U_2, \dots, U_n)$:

$$\det(M(U_1, U_2, \dots, U_n)) = \det(M(V_1, V_2, \dots, V_n)).$$

- c) Dédurre des résultats précédents l'inégalité :

$$|\det(M(V_1, V_2, \dots, V_n))| \leq \|V_1\|_2 \|V_2\|_2 \dots \|V_n\|_2.$$

Démontrer, lorsque les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$ sont tous différents de 0, qu'il y a égalité entre les deux membres de cette relation si et seulement si les vecteurs $V_1, V_2, \dots, V_n$ sont deux à deux orthogonaux.

6) **Une majoration du réel ρ :**

Démontrer pour tout vecteur X de l'espace vectoriel E_n , de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$, l'inégalité suivante :

$$|v(X)|^2 \leq \prod_{q=1}^n \sum_{p=1}^n |x_p|^{2(q-1)}.$$

Déterminer pour un vecteur X unitaire ($\|X\| = 1$) de l'espace vectoriel E_n une majoration du module $|v(X)|$. En déduire la valeur du réel ρ .

7) **Recherche des vecteurs W :**

Soit W un vecteur unitaire de l'espace E_n , de coordonnées x_p , $1 \leq p \leq n$, pour lequel le déterminant $v(W)$ de la matrice $V(W)$ a un module égal au réel $\rho = n^{n/2}$:

$$|v(W)| = n^{n/2}.$$

- a) Démontrer que les coordonnées x_p , $1 \leq p \leq n$, de ce vecteur W sont deux à deux différentes l'une de l'autre : pour tout couple d'entiers p et q , $p \neq q$, $x_p \neq x_q$.
- b) Démontrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Hadamard, que les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ de ce vecteur ont toutes un module égal à 1 et vérifient les $n - 1$ relations suivantes :

$$\sum_{p=1}^n x_p = 0, \sum_{p=1}^n (x_p)^2 = 0, \dots, \sum_{p=1}^n (x_p)^{n-1} = 0.$$

A ce vecteur W est associé le polynôme P_W défini par la relation suivante : pour tout réel t ,

$$P_W(t) = \prod_{p=1}^n (t - x_p).$$

Ce polynôme P_W peut aussi être écrit sous la forme :

$$P_W(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

- c) Que vaut le coefficient a_n ? Démontrer qu'il est possible de poser $a_0 = -e^{i\theta_0}$ où θ_0 est un réel. Soit F_W la fraction rationnelle définie par la relation :

$$F_W(t) = \frac{P'_W(t)}{P_W(t)}.$$

$P'_W(t)$ est le polynôme dérivée du polynôme P_W .

- d) Démontrer que, sur l'ensemble de définition de la fraction rationnelle F_W , la relation ci-dessous a lieu :

$$F_W(t) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{t - x_p}.$$

En déduire qu'il existe un réel R ($R > 0$) tel que sur l'intervalle ouvert $] -R, R[$ la fonction F_W est développable en série entière. Déterminer un minorant du réel R .

La fonction F_W est donc dans l'intervalle $] -R, R[$ la somme d'une série entière qui s'écrit :

$$F_W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k.$$

- e) Déterminer les coefficients f_k , $k = 0, 1, \dots$, à l'aide des coordonnées du vecteur W . Quelle conclusion en tirer sur les $n - 1$ premiers coefficients $f_0, f_1, \dots, f_{n-2}$?
- f) Déduire des résultats précédents l'expression du polynôme P'_W , polynôme dérivée du polynôme P_W . Déterminer le polynôme P_W , puis les coordonnées x_p , $1 \leq p \leq n$ du vecteur W . Calculer, à titre de vérification, les normes de ce vecteur dans E_n et dans F_n , c'est-à-dire $\|W\|$ et $\|W\|_2$.
- g) Combien y-a-t-il de vecteurs W dont une au moins des coordonnées est égale à 1 ?

FIN DU PROBLÈME