ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PSI.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de certaines équations différentielles du type suivant :

(E) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0.$$

Première partie

L'objet de cette partie est l'étude de l'équation différentielle :

(E₁) $$y''(t) + e^{i\,t}\, y(t) = 0.$$

I.1. Caractérisation d'une solution périodique :

Démontrer qu'une fonction f, définie sur toute la droite réelle, solution de l'équation différentielle ($\mathbf{E}_1$), est 2π-périodique si et seulement si elle prend, ainsi que sa dérivée f', mêmes valeurs en 0 et en 2π :

$$f(0) = f(2\pi), \quad f'(0) = f'(2\pi)$$

I.2. Construction d'une solution périodique :

Soit f une fonction 2π-périodique solution de l'équation différentielle ($\mathbf{E}_1$) ; soit $c_n(f), n \in \mathbf{Z}$, ses coefficients de Fourier.

$$\text{pour tout entier relatif } n : c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-i\,n\,t}\, dt.$$

a. Démontrer que la fonction f est la somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que, pour tout réel t,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{i\,n\,t}.$$

b. Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction dérivée seconde f'' de f en fonction de ceux de f. En déduire, à l'aide de l'équation différentielle, la relation de récurrence qui lie $c_n(f)$ à $c_{n-1}(f)$.

c. Préciser la valeur du coefficient de Fourier $c_{-1}(f)$; en déduire la valeur de tous les coefficients de Fourier de rang strictement négatif. Calculer les coefficients de Fourier de rang positif en fonction de $c_0(f)$. En déduire l'expression de la fonction f.

I.3. Inégalité vérifiée par la fonction f et sa dérivée f' :

a. Soit h un réel strictement positif ; établir une majoration du module des deux nombres complexes C et D, définis ci-dessous par les relations :

$$C = f(t+h) - f(t) - h\,f'(t) \quad ; \quad D = f(t-h) - f(t) + h\,f'(t).$$

en fonction de la norme de la convergence uniforme de la fonction f : $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$.

b. Déduire des deux inégalités obtenues la relation :

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2}\ \|f\|_\infty.$$

Deuxième partie

Soit $(u_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ la suite des fonctions définies sur la droite réelle par la relation suivante :

$$u_n(x) = (-1)^n\ \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Soit g la fonction somme de la série entière de terme général $u_n(x)$, définie dans l'intervalle de convergence de cette série par la relation suivante :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Le but de cette partie est l'étude de la fonction g.

II.1. Rayon de convergence :

Déterminer le rayon de convergence R de la série de terme général $u_n(x)$.

II.2. Signe de la fonction g :

Quelle est le signe de la fonction dérivée g', sur le segment $[0,2]$? En déduire qu'il existe un réel x_0 tel que la fonction g est positive sur l'intervalle semi-ouvert $[0,x_0[$ et négative sur l'intervalle semi-ouvert $]x_0,2]$. Démontrer l'inégalité $x_0 > \sqrt{2}$ (prendre $\sqrt{2} = 1,41$).

Troisième partie

Le but de cette partie est d'étudier les zéros des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{E}_2) \qquad y''(t) + e^t\, y(t) = 0.$$

Dans toute cette partie y désigne une solution réelle de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$.

III.1. Zéros de la fonction y :

a. Préciser la fonction y lorsqu'il existe un réel α tel que la fonction y et sa dérivée sont nulles en ce point α : $y(\alpha) = 0,\ y'(\alpha) = 0$.

b. Soient a et b deux réels $(a < b)$, z une solution réelle de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{F}) \qquad z''(t) + e^a\, z(t) = 0.$$

La fonction z est supposée s'annuler en deux points α et β de l'intervalle $[a,b]$ $(a \leq \alpha < \beta \leq b)$ et être strictement positive sur l'intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$. Soit y une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$.

Soit **H** l'hypothèse : "la fonction y est strictement positive sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$".

Soit W la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ par la relation suivante :

$$W(t) = y(t)\, z'(t) - y'(t)\, z(t).$$

Etudier les variations de la fonction W sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$; en déduire que l'hypothèse **H** formulée ci-dessus est fausse.

En conclure que, pour toute solution réelle z de l'équation différentielle (**F**), entre deux zéros consécutifs de la fonction z se trouve au moins un zéro de la fonction y.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel τ, toute solution y réelle de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$ a au moins un zéro dans l'intervalle

$$\left[\tau,\ \tau + \pi\ \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

III.2. Espacement des zéros de la fonction y :

Soit y une solution réelle de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$, différente de la solution nulle.

a. Soit τ un zéro de la fonction y ; démontrer qu'il existe un intervalle ouvert $]\tau, \tau + c[$, où c est un réel strictement positif sur lequel la fonction y n'est pas nulle.

b. Soient deux zéros consécutifs α et β de la fonction y. Démontrer, en considérant une solution réelle z de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathbf{G}) \qquad z''(t) + e^\beta\, z(t) = 0,$$

que les réels α et β vérifient l'inégalité suivante :

$$\beta - \alpha \geq \pi\ \exp\left(-\frac{\beta}{2}\right).$$

Quatrième partie

L'objet de cette partie est de construire une fonction Ψ solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$. Soit $(v_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, une suite de fonctions définies sur la droite réelle par la relation :

$$v_n(t) = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\, e^{n\,t}.$$

Lorsque la série de fonctions de terme général v_n est convergente, soit Ψ la fonction somme de cette série :

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\, e^{n\,t}.$$

IV.1 La fonction Ψ est solution de l'équation différentielle $\mathbf{E}_2$:

a. Etablir que, pour tout réel a, la série de terme général $v_n(t)$ est uniformément convergente sur la demi-droite $]-\infty, a]$.

b. Démontrer que la fonction Ψ est une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_2)$ définie sur toute la droite réelle.

IV.2. Zéros de la fonction Ψ :

Démontrer, en utilisant des résultats des deuxième et troisième parties, que les zéros de la fonction Ψ constituent une suite monotone croissante $(t_n)_{n=0,1,2,...}$, de réels :

$$t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$$

telle que :

$$\frac{\ln 2}{2} < t_0, \quad \lim_{n\to\to\infty} t_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\to\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Cinquième partie

Le but de cette partie est d'établir des majorations des fonctions solutions de l'équation différentielle :

(E) $$y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0.$$

V.1.Une inégalité :

Soient M un réel strictement positif $(M > 0)$ et a un réel. Soient f et g deux fonctions positives, définies et continues sur la demi-droite $[a, \infty[$, telles que, pour tout réel t de la demi-droite $[a, \infty[$, l'inégalité ci-dessous ait lieu :

$$f(t) \leq M + \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx.$$

Etablir, en considérant par exemple la fonction F, définie sur la demi-droite $[a, \infty[$ par la relation :

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, g(x)\, dx,$$

la propriété :

$$f(t) \leq M \exp\left(\int_a^t g(x)\, dx\right).$$

Dans la suite le réel a est strictement positif $(a > 0)$; soit y une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, \infty[$, vérifiant l'équation différentielle (**E**) :

$$\textbf{(E)} \qquad y''(t) + \varphi(t)\, y(t) = 0,$$

où φ est une fonction réelle, définie et continue sur la demi-droite $[a, \infty[$, telle que la fonction $t \mapsto t.\varphi(t)$ est intégrable sur la demi-droite $[a, \infty[$. (l'intégrale $\int_a^\infty t\, |\varphi(t)|\, dt$ existe).

V.2. Majoration de la fonction $|y(t)|/t$:

a. Déterminer une fonction affine A : $t \mapsto A(t)$, définie sur la demi-droite $[a, \infty[$, telle que, pour tout réel t de cette demi-droite, la relation ci-dessous ait lieu :

$$y(t) = A(t) - \int_a^t (t - x)\, y(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

b. Démontrer que la fonction j définie par la relation

$$j(t) = \frac{y(t)}{t},$$

est bornée lorsque le réel t croît vers l'infini. C'est-à-dire : il existe deux réels strictement positifs C et D tels que, pour tout t supérieur ou égal à C ($t \geq C$), il vienne : $|y(t)| \leq D\, t$.

V.3. Limites de $y'(t)$ **et de** $y(t)/t$:

Démontrer, en utilisant les résultats précédents que la fonction dérivée $y' : t \mapsto y'(t)$ a une limite lorsque le réel t croît vers l'infini ; soit ℓ cette limite :

$$\ell = \lim_{t \to \infty} y'(t).$$

b. En déduire que l'expression $j(t) = \frac{y(t)}{t}$ a pour limite ℓ lorsque le réel t croît vers l'infini.

FIN DU PROBLEME