CCP 2 TSI 2000

1 Préliminaire

1.1 Si $n \in \mathbb{N}$ $\quad c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)(\cos(nt) - i\,\sin(nt))\,dt = \dfrac{1}{2}(a_n(f) - i\,b_n(f))$

$$\text{Puis : } \quad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \qquad \text{et} \qquad c_0 = a_0$$

1.2 De même on peut calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $c_n(f)$ et de $c_{-n}(f)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n(f) \;=\; c_n(f) \;+\; c_{-n}(f) \qquad\qquad b_n(f) \;=\; i\Big(c_n(f) \;-\; c_{-n}(f)\Big)$$

En remarquant qu'une combinaison linéaire de séries absolument convergentes est aussi absolument convergente, on a l'équivalence demandée.

1.3 Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\quad c_n(f)\,e^{inx} \;+\; c_{-n}(f)\,e^{-inx} \;=\; a_n(f)\,\cos(nx) \;+\; b_n(f)\,\sin(nx)$

2 b=0 , a réel

$$E_{a,0} \;: \qquad y'' \;+\; a\,y \;=\; 0$$

2.1 $a \;=\; -1$

2.2 a réel quelconque (?)

3 Coefficients des dérivées

3.1 En intégrant par partie $c_n(f')$:

$$c_n(f') \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt \;=\; \Big[-in\,f(t)e^{-int}\Big]_0^{2\pi} \;+\; \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f') \;=\; i\,n\,c_n(f) \qquad \text{avec} \qquad c_0(f') \;=\; 0$$

3.2 Par récurrence sur k : $c_n(f^{(k)}) \;=\; (in)^k\,c_n(f)$

3.3 On en déduit que : $|c_n(f)| \;=\; \dfrac{1}{|n|^{k+1}}\;\left|c_n(f^{(k+1)})\right|$

En remarquant que pour toute fonction g, continue 2π périodique :

$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad |c_n(g)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |g(t)|\,dt$ est bornée $\qquad$ (soit M un majorant).

On obtient : $\left|c_{\,|n|}(f)\right| \;\leq\; \dfrac{1}{|n|^{k+1}}\,M$

donc : $|c_n(f)| \;=\; o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$

et de même : $|c_{-n}(f)| \;=\; o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ lorsque $n \to +\infty$

3.4 Appliquons **3.3** à la fonction $f^{(k)}$ également de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont les coefficients sont négligeables devant $\dfrac{1}{n^{k'}}$ lorsque $n \to +\infty$

$$\left|c_n(f^{(k)})e^{inx} + c_{-n}(f^{(k)})e^{-inx}\right| \;\leq\; \left|c_n(f^{(k)}\right| \;+\; \left|c_{-n}(f^{(k)})\right| \;=\; o\left(\frac{1}{n^{k'}}\right)$$

En choisissant $k' \geq 2$ on en déduit la convergence absolue de la série (majoration par une série positive convergente). En outre, cette série est la série de Fourier associée à $f^{(k)}$ (**1.3**), fonction continue qui vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) \;=\; c_0(f^{(k)} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big(c_n(f^{(k)})e^{inx} \;+\; c_{-n}(f^{(k)})e^{-inx}\Big)$$

Compte tenu de (**3.1**) : $c_n(f^{(k+1)})e^{inx} \;=\; in\,c_n(f^{(k)})e^{inx} \;=\; \big(c_n(f^{(k)})e^{inx}\big)'$

Le développement en série de Fourier de la dérivée est donc la série obtenue par dérivation terme à terme (fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ de période 2π).

4 b≠0

4.1 En écrivant $E_{a,b}$ sous la forme $y'' \;=\; -(a + be^{2ix})\,y$
Une solution étant au moins de classe $\mathcal{C}^2$, il en est de même pour y'' et donc y se retrouve de classe $\mathcal{C}^4$ et par récurrence y est de classe $\mathcal{C}^\infty$

4.2 Toute solution réelle ainsi que ses dérivées successives de période 2π vérifent le théorème de Dirichlet en étant continues. Elles sont donc sommes de leur série de Fourier respective pour tout $x \in \mathbb{R}$

4.3 $c_n(g) \;=\; \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(a + be^{2ix})f(x)e^{-inx}\,dx \;=\; \dfrac{a}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \;+\; \dfrac{b}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-i(n-2)x}\,dx$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(g) \;=\; a\,c_n(f) \;+\; b\,c_{n-2}(f)$$

4.4 Les solutions de $E_{a,b}$ vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f^{(2)}) \;=\; -c_n(g) \;=\; -a\,c_n(f) \;-\; b\,c_{n-2}(f)$$

Puis avec (**3.1**) :

$$(a \;-\; n^2)\,c_n(f) \;+\; b\,c_{n-2}(f) \;=\; 0$$

5 a=0

La relation précédante devient : $n^2\,c_n(f) \;=\; b\,c_{n-2}(f)$

5.1 Pour $n = 2p+1$ impair on obtient :

$$(2p+1)^2 c_{2p+1}(f) \;=\; b\,c_{2p-1}(f)$$

Le coefficient $2p+1$ et b ne sont jamais nul. Si $c_1(f) \;=\; 0$ alors par récurrence tous les c_{2p+1} sont nuls.
De même si $c_1(f) \neq 0$, tous les coefficients se calculent à partir de cette constante et sont non nuls.
On obtient la formule de récurrence : $\forall p \in \mathbb{Z} c_{-2p+1}(f) \;=\; \dfrac{(2p-3)^2}{b}\,c_{-2p+3}(f) \;=\; \dfrac{(2p-3)^2}{b}\,c_{-2(p-1)+1}(f)$
Etudions la série de ces coefficients par la règle de d'Alembert

$$\left|\frac{c_{-2p+1}(f)}{c_{-2p+3}(f)}\right| \;=\; \frac{(2p-3)^2}{|b|} \qquad \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty$$

On est dans le cas où la série diverge parce que son terme général ne tend pas vers 0, la série n'est pas absolument convergente.
remarque : *Dans le cas d'une solution réelle, on a trouvé en (***3.3***) que cette série des coefficients était absolument convergente pour une solution de $E_{a,b}$, ce qui prouve par l'absurde $c_1(f) = 0$*

5.2 $\forall q \in \mathbb{Z} (2q)^2\,c_{2q}(f) \;=\; b\,c_{2q-2}(f)$
Pour $q \;=\; 0$ On trouve $c_{-2}(f) \;=\; 0$, puis pour $q \;=\; -p \quad p \in \mathbb{N}^*$ les coefficients sont calculés en fonction de $c_{-2}(f)$ donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad c_{-2p}(f) \;=\; 0$$

5.3 De même :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad c_{2p}(f) \;=\; \frac{b}{4p^2}c_{2p-2}(f)$$

qui permet de calculer les coefficients en fonction de $c_0(f)$

6 Série entière

6.1 Le rayon de convergence est étudié par la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\right| \;=\; \lim_{n\to+\infty}\frac{|b|}{4n^2} \;=\; 0$$

La série entière converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

6.2 La convergence de la série entière est absolue en tout point intérieur au disque de convergence donc ici pour $z \;=\; 1$ ou pour $z \;=\; e^{2ix} \qquad (\left|e^{2ix}\right| \;=\; 1)$

6.3 on a alors :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{2inx}$$
$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2in\gamma_n e^{2inx}$$
$$\varphi'' = \sum_{n=1}^{\infty} (-4)n^2 e^{2inx}$$

Puis en reconnaissant la formule de récurrence :

$$\varphi''(x) + be^{2ix}\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4n^2\,\gamma_n + b\,\gamma_{n-1})e^{2inx} = 0$$

Pour vérifier que φ est une solution non nulle, soit $\alpha = \arg(b)$,
constatons que $\gamma_n = \dfrac{b^n}{4^n(n!)^2} = e^{i\alpha}\dfrac{|b|}{4n^2}\gamma_{n-1} = e^{in\alpha}\dfrac{|b|^n}{4^n(n!)^2}$
et calculons $\varphi\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\gamma_n|$
C'est une série de termes positifs convergente : $\varphi\left(-\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ En outre φ est de période 2π et même π.

7 algorithmique

calcul avec Maple (présentation simple pour une valeur de m et une de b numériques fixées.)

```
> restart :
> gama[0] := 1 ;
> m := 15 ; b := 4+I ;
> for k from 1 while evalf(abs(gama[k-1])) > 10^(-m)
> do
> gama[k] := b/(4*k^2)*gama[k-1] ;
> evalf(abs(gama[k])) ;
> n := k ;
> od :
> for k from 1 to n do
> [gamma,k,‘ = ‘,gama[k],‘ de norme ‘,evalf(abs(gama[k]))] ;
> od ;
> k := ’k’:
> sn := t -> sum(gama[k]*exp(2*I*k*t),k = 0..n) ;
> Sn(Pi/6) := evalf(sn(Pi/6,n)) ;
```

$$gama_0 := 1$$

$$m := 15$$

$$b := 4 + I$$

$$[\gamma,\ 1,\ =\ ,\ 1 + \frac{1}{4}I,\ \ de\ norme\ ,\ 1.030776407]$$

$$[\gamma,\ 2,\ =,\ \frac{15}{64}+\frac{1}{8}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .2656250000]$$

$$[\gamma,\ 3,\ =,\ \frac{13}{576}+\frac{47}{2304}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .03042222033]$$

$$[\gamma,\ 4,\ =,\ \frac{161}{147456}+\frac{5}{3072}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .001959906684]$$

$$[\gamma,\ 5,\ =,\ \frac{101}{3686400}+\frac{1121}{14745600}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .00008080902275]$$

$$[\gamma,\ 6,\ =,\ \frac{11}{47185920}+\frac{611}{265420800}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .2313778724\,10^{-5}]$$

$$[\gamma,\ 7,\ =,\ -\frac{727}{104044953600}+\frac{20047}{416179814400}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .4867323507\,10^{-7}]$$

$$[\gamma,\ 8,\ =,\ -\frac{31679}{106542032486400}+\frac{23}{31708938240}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .7839253490\,10^{-9}]$$

$$[\gamma,\ 9,\ =,\ -\frac{50999}{8629904631398400}+\frac{277441}{34519618525593600}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .9975947582\,10^{-11}]$$

$$[\gamma,\ 10,\ =,\ -\frac{14579}{184104632136499200}+\frac{113221}{1725980926279680000}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .1028297140\,10^{-12}]$$

$$[\gamma,\ 11,\ =,\ -\frac{1319867}{1670749536638730240000}+\frac{2529647}{6682998146554920960000}\,I,\ \ de\ norme\ ,\ .8759871330\,10^{-15}]$$

$$sn := t \to \sum_{k=0}^{n} gama_k\, e^{(2\,I\,k\,t)}$$

$$\mathrm{Sn}(\frac{1}{6}\,\pi) := 1.036426876 + 1.109358033\,I$$