

# MATHÉMATIQUES

## Exercice 1

$f$  est l'unique fonction impaire de période  $2\pi$ , valant 1 sur l'intervalle  $]0, \pi[$  et 0 en  $\pi$ .

ø1 Calculer les coefficients de Fourier réels de  $f$ .

ø2 Exprimer  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{4N} \frac{(\sin[(2p+1)k(\pi/4)])}{(2p+1)} \sin[3k(\pi/4)] \right]$  où  $k \in \mathbb{C}$  à l'aide de  $f$ .

ø3 Montrer la convergence de la suite  $S_{\lfloor \cdot \rfloor} = \sum_{p=-N}^N \frac{1}{(8p+5)}$  indexée par  $N$ . On note  $S$  sa limite.

ø4 Pour le calcul de  $S$ , on définit  $\sigma_p = \sum_{k=0}^7 \sin[(2p+1)k(\pi/4)] \sin[3k(\pi/4)]$  où  $p \in \mathbb{Z}$ .

(a) Calculer pour chaque  $p$  la valeur de  $\sigma_p$ , sachant que  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_1 = 4$  et  $\sigma_2 = -4$ .

(b) Montrer la convergence de la suite  $\sum_{p=0}^{4N} \frac{(\sigma_p)}{(2p+1)}$  indexée par  $N$ . On note  $L$  sa limite.

(c) Calculer la somme de Riemann définie par les extrémités de gauche de huit sous-intervalles consécutifs de longueur  $(\pi/4)$  approchant l'intégrale  $\int_0^{2\pi} f(t) \sin(3t) dt$ .

(d) En déduire la valeur de  $L$ , puis celle de  $S$ .

[figure]

## Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, [(\rightarrow) \parallel i], [(\rightarrow) \parallel j])$ .

On recherche les trajectoires des arcs paramétrés  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases}$$

On rappelle qu'une trajectoire est un ensemble de points. Sur la figure de la page ci-contre, le champ de vecteurs  $(x, y) \rightarrow (x^2 + y, x - y)$  est représenté en sens et direction.

On admettra l'existence et l'unicité d'une solution du système différentiel donné vérifiant des conditions initiales  $x(0) = u$ ,  $y(0) = v$ .

ø1 Expliciter cette solution pour  $u = 0$  et  $v = 0$ .

ø2 Recherche des trajectoires rectilignes.

(a) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \end{vmatrix}$$

inflexion ?

(b) Que peut-on dire de ce déterminant si la trajectoire présente une

(c) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle  $x' = x^2$ .

(d) Préciser la ou les trajectoires incluses dans une droite.

ø3 Recherche des trajectoires tracées sur un cercle centré sur l'axe Oy et passant par l'origine.

(a) Déterminer une courbe contenant les points o— la trajectoire présente une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

(b) En déduire l'unique cercle centré sur l'axe Oy, passant par l'origine, le point (0,a) et contenant une trajectoire du système différentiel considéré.

(c) Réciproquement, préciser pour cette valeur de a la nature de la solution maximale passant par (0,a) à l'instant  $t = 0$ , en utilisant par exemple la combinaison  $[(x'y-y'x)/(y^2)] \cdot t$

### Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur  $\mathbb{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , et u un endomorphisme de cet espace. Pour k entier naturel non nul,  $u^k$  est la composée ( $u \circ u \circ \dots \circ u$ ) o— u apparaEt k fois;  $u^0$  est l'application identique.

Pour un vecteur x de E, on appelle orbite de x selon u le sous-espace de E engendré par les images successives de x :  $\text{Orb}_u(x) = \text{Vect} \{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ . L'endomorphisme u est dit cyclique s'il existe un vecteur particulier  $x_0$  réalisant l'égalité  $E = \text{Orb}_u(x_0)$ .

#### ø1 Étude d'un exemple

Ici l'espace E est de dimension 4. Après quelques recherches, on a pu déterminer deux vecteurs vérifiant les propriétés suivantes :

- le vecteur a vérifie :  $(a, u(a))$  est libre et  $2u^2(a) - u(a) - a = 0$ ,
- le vecteur b vérifie :  $(b, u(b), u^2(b))$  est libre et  $u^3(b) - u^2(b) + u(b) - b = 0$ .

(a) Démontrer que la dimension de  $\text{Orb}_u(a)$  est égale à 2.

(b) Démontrer que la restriction de u à l'orbite de a est diagonalisable et préciser la matrice de cette restriction dans une base de diagonalisation  $(e_1, e_2)$ . Énoncer sans démonstration des résultats identiques concernant la restriction de u à l'orbite de b.

(c) Montrer que u est diagonalisable.

Par la suite, on notera  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  une base de diagonalisation,  $e_1$  étant commun aux deux orbites et  $e_2$  étant associé à une valeur propre réelle.

(d) Déterminer un vecteur c dont l'orbite est de dimension 3, la restriction de u à cette orbite étant annulée par le polynôme  $P(t) = (2t+1)(t^2+1)$ . Exprimer ce vecteur dans la base de diagonalisation.

(e) En déduire que l'orbite de  $a+b$  n'est pas nécessairement de dimension 4.

(f) Préciser un vecteur d telle que l'orbite de  $b+d$  soit de dimension 4.

*ø2 Une condition nécessaire*

On revient au cas de dimension  $n$ , et l'on suppose que l'endomorphisme  $u$  est cyclique,  $x_0$  étant l'un des vecteurs d'orbite maximale définis dans le préambule,  $B$  étant alors la base  $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{(n-1)}(x_0))$ .

(a) Préciser la matrice  $A$  de l'application  $u$  dans la base  $B$ .

(b) Préciser la première colonne des matrices  $A^k$ ,  $k$  étant un entier compris entre 0 et  $n-1$ .

(c) En déduire une condition nécessaire portant sur son polynôme minimal pour qu'un endomorphisme soit cyclique.

---