ENS Ulm-Lyon 2000

Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (définie sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). L'objet de ce problème est l'étude de propriétés qualitatives du système d'équations différentielles

$$(E) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x(t))$$

où x est une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. La norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^d$ sera notée $\|.\|$ et $B(x, r)$ désignera la boule ouverte de centre x et de rayon r. On notera $\operatorname{Re} z$ la partie réelle du nombre complexe z. La différentielle de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ sera notée $\mathrm{d}f(x_0)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et trois réels $t_1 < t_0 < t_2$. On dira qu'une solution $x \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^d)$ de (E) passe par x_0 à l'instant t_0 si $x(t_0) = x_0$. Une solution $x(t)$ de (E) sera aussi appelée trajectoire de (E). On admet le théorème de Cauchy-Lipschitz (avec dépendance $\mathcal{C}^\infty$ en les données initiales), qu'on utilisera sans démonstration :

Théorème de Cauchy-Lipschitz. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(R^d, R^d)$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Alors il existe $\tau > 0$ et $r > 0$ et une fonction $\varphi(t, y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\times B(x_0, r)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telle que*

$$\varphi(t_0, y) = y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) = f(\varphi(t, y))$$

pour tout $(t, y) \in]t_0 - \tau, t_0 + \tau[\times B(x_0, r)$.

On rappelle d'autre part qu'il existe une unique solution maximale $x(t)$ de (E) passant par x_0 en t_0. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < t_0 < b$ et si $b < +\infty$ (respectivement $a > -\infty$) alors $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{t\in[t_0,b[} \|x(t)\| = +\infty$ (respectivement $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{t\in]a,t_0]} \|x(t)\| = +\infty$).

Un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est dit point *critique* de f si $f(x_0) = 0$.

Définition 1 (stabilité d'un point critique). *Un point critique x_0 est dit stable s'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x_1 \in B(x_0, \eta)$, il existe une solution $x(t)$ de (E) définie pour tout $t \geqslant 0$ vérifiant $x(0) = x_1$ et*

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t) - x_0\| = 0\,.$$

Un point critique est dit instable s'il n'est pas stable.

Une solution $x(t)$ de (E) est dite *périodique* si elle est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et s'il existe $T > 0$ tel que $x(t + T) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Soit

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \tfrac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\}\,.$$

On dit que $\mathcal{C}$ est absorbante pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ si $f(x).x < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x| = 1$ et si $f(x).x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x| = 1/2$.
La première partie du problème établit quelques propriétés de stabilité des points critiques. La seconde partie esquisse une classification topologique des points critiques. La troisième partie est consacrée à la preuve du théorème suivant :

Théorème de Poincaré-Bendixson. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On suppose que $\mathcal{C}$ est absorbante pour f et que f n'a pas de points critiques dans $\mathcal{C}$. Alors il existe une solution périodique x de (E), non constante, avec $x(t) \in \mathcal{C}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Partie I : Stabilité de points critiques

Soit dans cette partie $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (avec $d \geqslant 2$) telle que $f(0) = 0$.

1°) On suppose dans cette question que les parties réelles des valeurs propres de $\mathrm{d}f(0)$ sont strictement négatives. Soit λ_0 la plus grande des parties réelles des valeurs propres de $\mathrm{d}f(0)$.

a) Montrer que pour tout $\lambda > \lambda_0$ il existe un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^d$, noté $<.|.>$, tel que

$$\operatorname{Re}< \mathrm{d}f(0)x|x> \leqslant \lambda <x|x>\,.$$

On pourra commencer par le cas $\mathrm{d}f(0)$ diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), avant de traiter le cas où $\mathrm{d}f(0)$ est trigonalisable.

b) Montrer que pour tout $\lambda > \lambda_0$ il existe un produit scalaire euclidien (toujours noté $<.|.>$) et un réel $\sigma > 0$ tel que

$$<f(x)|x> \leqslant \lambda <x|x>$$

pour tout x tel que $\|x\| \leqslant \sigma$.

c) En déduire que 0 est stable. Montrer que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\|x(t)\| = \mathcal{O}(\exp(\lambda t))$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Montrer par un exemple que l'on n'a pas nécessairement $\|x(t)\| = \mathcal{O}(\exp(\lambda_0 t))$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

2°) On suppose dans cette question que les parties réelles des valeurs propres de $\mathrm{d}f(0)$ sont strictement positives. Montrer que 0 est un point critique instable.

3°) Montrer par des exemples que si les valeurs propres de $\mathrm{d}f(0)$ sont imaginaires pures, alors on ne peut conclure ni à la stabilité ni à l'instabilité de 0.

4°) Soit dans toute cette question $d = 2$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que sa différentielle $\mathrm{d}f(0)$ en 0 ait une valeur propre réelle strictement positive λ et une valeur propre réelle strictement négative μ.

a) On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A est définie par

$$\exp(A) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{A^n}{n!} .$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un vecteur. Vérifier que la dérivée de $t \longmapsto \exp(tA)x_0$ est $A\exp(tA)x_0$.

b) Soit e_μ un vecteur propre correspondant à la valeur propre μ. On note $\mathrm{d}f(0) = A$. On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence : $u_0(t) = 0$ et

$$u_{n+1}(t) = \exp(tA)e_\mu - \int_t^{+\infty} \exp(A(t-\tau))(f(u_n(\tau)) - Au_n(\tau))\mathrm{d}\tau .$$

Vérifier que la suite est bien définie. Montrer qu'il existe $C_0 > 0$ et $T_0 > 0$ tels que $\|u_n(t)\| \leqslant C_0 \exp(\mu t)$ pour tout $t \geqslant T_0$ et pour tout $n \geqslant 0$.

c) Montrer qu'il existe $T_1 \geqslant T_0$ tel que la suite de fonctions $u_n(t)\exp(-\mu t)$ converge uniformément pour $t \geqslant T_1$.

d) En déduire que pour r assez petit il existe deux trajectoires distinctes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de (E) définies pour $t \geqslant 0$ telles que $\|x_1(0)\| = \|x_2(0)\| = r$ et telles que $x_1(t) \longrightarrow 0$ et $x_2(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

e) Montrer de même que pour r assez petit il existe deux solutions distinctes $x_3(t)$ et $x_4(t)$ de (E) définies pour $t \leqslant 0$ telles que $\|x_3(0)\| = \|x_4(0)\| = r$ et telles que $x_3(t) \longrightarrow 0$ et $x_4(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow -\infty$.

Partie II : Stabilité topologique

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ admettant 0 pour point critique. On désigne par φ et ψ les solutions respectives des équations

$$\varphi(0, x_0) = x_0 , \quad \frac{\mathrm{d}\varphi(t,x_0)}{\mathrm{d}t} = f(\varphi(t, x_0))$$
$$\psi(0, x_0) = x_0 , \quad \frac{\mathrm{d}\psi(t,x_0)}{\mathrm{d}t} = g(\psi(t, x_0)) .$$

On dit que f et g sont topologiquement équivalentes (sous entendu : au voisinage du point critique 0) s'il existe un homéomorphisme T (bijection continue d'inverse continue) d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant 0 dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant 0, envoyant 0 sur 0, et $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$, tels que l'égalité suivante ait un sens et ait lieu pour $\|x\| < \varepsilon$ et $|t| < \tau$:

$$T(\varphi(t, x)) = \psi(t, T(x)) .$$

On dit que f et g sont linéairement équivalentes si f et g sont deux applications linéaires et s'il existe une application linéaire et inversible T telle que $T(\varphi(t, x)) = \psi(t, T(x))$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

1°) Soient A et B deux matrices $d \times d$ et f, g définies sus $\mathbb{R}^d$ par $f(x) = Ax$ et $g(x) = Bx$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer que f et g sont linéairement équivalentes si et seulement si A et B sont deux matrices semblables.

2°) Soient f et g définies comme dans la question précédente.

a) On suppose que les parties réelles de toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives et qu'il existe une valeur propre de B réelle strictement positive. Montrer que f et g ne sont pas topologiquement équivalentes.

b) On suppose que A et B n'ont que des valeurs propres de partie réelle nulle. f et g sont elles toujours topologiquement équivalentes ?

c) On suppose que les parties réelles des valeurs propres de A et B sont strictement négatives. Montrer que f et g sont topologiquement équivalentes. Peut-on toujours choisir T de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que son inverse ?

3°) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que sa différentielle $\mathrm{d}f(0)$ en 0 n'ait que des valeurs propres de partie réelle strictement négative. Montrer que les fonctions f et $x \longmapsto \mathrm{d}f(0).x$ sont topologiquement équivalentes.

4°) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 2$ il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle qu'il existe exactement N solutions maximales distinctes de (E) tendant vers 0 quand t tend vers $+\infty$, et exactement N solutions maximales distinctes tendant vers 0 quand t tend vers $-\infty$. On pourra se contenter d'un dessin précis donnant l'allure des orbites. En déduire qu'il existe un nombre infini de classes d'équivalence pour la relation « être topologiquement équivalent à ».

Partie III : Existence d'une solution périodique

On se place dans cette partie en dimension $d = 2$. On dit qu'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}^2$ est *transverse* pour f si $f(x) \neq 0$ sur ce segment et si $f(x)$ n'est jamais colinéaire au vecteur $\overrightarrow{ab}$ quand $x \in [a, b]$. Le candidat est invité à s'aider de dessins dans la recherche des solutions aux questions, en particulier pour les questions 1d et 1e, et pourra utiliser sans démonstration le théorème de Jordan, énoncé ci-après.

Théorème de Jordan. *On appelle courbe de Jordan l'image d'une application continue $c : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $c(0) = c(1)$ et $c(t) \neq c(s)$ pour $0 \leqslant t < s < 1$. Le complémentaire d'une courbe de Jordan a deux composantes connexes (« l'intérieur » et « l'extérieur ») dont une seule est non bornée.*

1°) Montrer que :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \neq 0$, il existe a et $b \in \mathbb{R}^2$, avec $a \neq b$ et $x \in]a, b[$, tel que le segment $[a, b]$ soit transverse pour f.

b) Soit $[a, b]$ un segment transverse. Toutes les courbes $x(t)$ solutions de (E) qui le traversent le traversent dans le même sens.

c) Soit $[a, b]$ un segment transverse. Pour tout $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute solution $x(t)$ de (E) passant à l'instant 0 en un point de $B(x_0, r)$, il existe t tel que $0 < t < \varepsilon$ et $x(t) \notin B(x_0, r)$.

d) Une solution périodique $x(t)$ de (E) coupe un segment transverse en au plus un point.
e) Supposons qu'une solution $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ non fermée coupe un segment transverse en un nombre fini de points x_i aux temps respectifs t_i avec $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \ldots < t_N < T$. Alors les x_i sont ordonnés sur le segment $[a, b]$.
2°) Soit $x(t)$ une solution de (E) définie pour tout $t \geqslant 0$ et soit C^+ la courbe

$$C^+ = \{x(t), t \geqslant 0\}\ .$$

On suppose de plus que $C^+ \subset B(0,1)$. On définit

$$L(C^+) = \{y \in \mathbb{R}^2 \ / \ \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty,\ \lim_{n\to+\infty} x(t_n) = y\}\ .$$

Montrer que $L(C^+)$ est fermé et invariant (c'est-à-dire que si $x_0 \in L(C^+)$, toute solution $x(t)$ de (E) avec $x(0) = x_0$ définie sur un intervalle $[0, T]$ vérifie $x(t) \in L(C^+)$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant T$).
3°) Si C^+ et $L(C^+)$ ont un point commun y non singulier, montrer que $x(t)$ est une solution périodique. On pourra considérer un segment transverse passant par y et utiliser les propriétés démontrées en 1.
4°) Montrer que $L(C^+)$ est le graphe d'une solution périodique de (E).
5°) En déduire le théorème de Poincaré-Bendixson.
6°) Montrer que le théorème de Poincaré-Bendixson est faux si on remplace « f n'a pas de points critiques dans $\mathcal{C}$ » par « tous les points critiques de f dans $\mathcal{C}$ sont instables » (le candidat pourra se contenter de dessiner soigneusement un contre-exemple et ne vérifiera pas que $f \in \mathcal{C}^\infty$). Trouver une bonne condition sur les points critiques pour que le théorème soit encore vrai.