ENS PC* 2000

Titre : *Exemples de sous-groupes polaires de $GL_n(\mathbf{R})$*

Fonctions de matrices

Q0 On montre d'abord par récurrence que $\forall k \in \mathbf{N}\ (PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$ et le résultat s'en déduit facilement par combinaison linéaire.

Q1 $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale et par hypothèse $p(D) = q(D)$, ce qui donne $p(M) = q(M)$ d'aprés la question précédente.

Q2 On doit vérifier que la matrice obtenue $p(M)$ est indépendante du choix du polynôme p, c'est une conséquennce directe de la question précédente.

Q3 Si D est diagonale, la matrice $p(D) = \exp(D)$ est aussi diagonale avec pour termes diagonaux les valeurs $p(\lambda) = \exp(\lambda)$ avec λ terme diagonal de D. Le résultat s'applique aussi bien à la matrice ${}^tD$:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \exp(tD) = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Les composantes de la fonction h défine par $h(t) = \exp(tD)$ sont clairement C^1 (et même C^∞) donc h est (au moins) C^1.

Q4 1. En écrivant $g(t) = ((a_{ij}(t)))$ et $h(t) = ((b_{ij}(t)))$ avec a_{ij} et b_{ij} de classe C^1 on a :

$$f(t) = g(t)h(t) = ((c_{ij}(t))) \text{ avec } c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)b_{kj}(t)$$

f apparait ainsi clairement de classe C^1. De plus $f'(t)$ a pour composantes les dérivées des composantes de $f(t)$, ce qui donne immédiatement :

$$f'(t) = g(t)h'(t) + g'(t)h(t)$$

2. $M = PDP^{-1}$ donc $h(t) = \exp(tM) = p(tM) = Pp(tD)P^{-1} = P\exp(tD)P^{-1}$, c'est donc le produit dans $M_n(\mathbf{R})$ de trois fonctions de classe C^1 et finalement h est C^1 avec :

$$h'(t) = P\frac{d}{dt}\Big(\exp(tD)\Big)P^{-1} = \begin{cases} PD\exp(tD)P^{-1} = Mh(t) \\ P\exp(tD)DP^{-1} = h(t)M \end{cases}$$

Matrices symétriques définies positives

Q5 1. ${}^tXMX = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$ et pour $M = I_n$ on trouve ${}^tXX = \sum_{1\le i\le n} x_i^2$ ce qui représente la norme (usuelle) au carré du vecteur X.

2. $f_{M^{-1}}(X) = {}^tXM^{-1}X = {}^tY{}^tMY = f_{{}^tM}(Y)$ avec $X = MY \iff Y = M^{-1}X$ et ${}^tY{}^tMY = {}^t({}^tY{}^tMY) = {}^tYMY = f_M(Y)$.

3. Pour $M \in S^+(n)$: $MX = 0 \Longrightarrow f_M(X) = 0 \Longrightarrow X = 0$ et donc M est inversible.
De plus pour $X \neq 0$, $Y = M^{-1}X \neq 0$ et par suite

$$f_{M^{-1}}(X) = f_M(Y) > 0$$

Finalement $M^{-1} \in S^+(n)$.

4. Si $M \in S^+(n)$, pour $X \neq 0$ on a $Y = PX \neq 0$ car P est inversible et par suite :

$$f_{^tPMP}(X) = f_M(Y) > 0$$

d'où ${}^tPMP \in S^+(n)$.

5. $N \in S(n)$ est diagonalisable dans une BON de vecteurs propres : il existe P orthogonale telle que $N = P^{-1}DP$ avec D diagonale. On a vu dans les questions précédentes qu'on pouvait alors écrire

$$\exp(N) = P^{-1}\exp(D)P$$

or $\exp(D)$ est une matrice clairement définie positive :

$$\forall X \neq 0 \ {}^tX\exp(D)X = \sum \exp(\lambda_i)x_i^2 > 0$$

Il en est donc de même de $P^{-1}\exp(D)P = {}^tP\exp(D)P$ d'après la question précédente.

Q6 1. Il s'agit de prouver que les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont strictement positives :

$$MX = \lambda X \Longrightarrow f_M(X) = \lambda^t XX > 0 \Longrightarrow \lambda > 0$$

La réciproque de ce résultat est d'ailleurs vraie : il suffit de procéder comme dans la question **Q5** 5. Tout ceci est bien classique :

une matrice symétrique est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives

2. Le fait que $N = p(M)$ ne dépende pas du choix de p se démontre comme à la question **Q2** et on a :

$$M = PDP^{-1} \Longrightarrow N = p(M) = Pp(D)P^{-1} \Longrightarrow N^2 = P(p(D))^2P^{-1} = PDP^{-1} = M$$

3. $\sqrt{M} \in S(n)$ et ses valeurs propres sont les racines carrées des valeurs propres de M donc sont strictement positives. En utilisant la réciproque du 1. on voit que $\sqrt{M} \in S^+(n)$.

Les applications définies par $\varphi(N) = N^2$ et $\psi(M) = \sqrt{M}$ vont de $S^+(n)$ dans $S^+(n)$ et sont réciproques l'une de l'autre, d'où la bijectivité. En effet :

- $\varphi(\psi(M)) = (\sqrt{M})^2 = M$ d'après la question précédente.
- $\psi(\varphi(N)) = \sqrt{N^2}$ or $N \in S^+(n)$ donc il existe P orthogonale et D diagonale telle que tous ses termes diagonaux λ soient stritement positifs avec $N = PDP^{-1}$. On a alors $N^2 = PD^2P^{-1}$ et la matrice $\sqrt{N^2}$ est obtenue en construisant un polynôme d'interpolation p tel que $p(\lambda) = \sqrt{\lambda^2} = \lambda$. On peut donc prendre

$$p(x) = x$$

et on trouve alors $\sqrt{N^2} = p(N) = N$.

4. $(\sqrt{M})^{-1} \in S^+(n)$ car $\sqrt{M} \in S^+(n)$ (question **Q5** 3.) et $\left((\sqrt{M})^{-1}\right)^2 = \left((\sqrt{M})^2\right)^{-1} = M^{-1}$ donc d'après la question précédente $(\sqrt{M})^{-1} = \sqrt{M^{-1}}$.

Q7 On construit de la même manière, pour M donnée dans $S^+(n)$, un polynôme p réel tel que $p(\lambda) = \ln\lambda$ pour toute valeur propre λ de M et la matrice $\ln(M) = p(M)$ est alors définie sans ambiguïté.

On vérifie encore facilement que les applications définies par $\varphi(N) = exp(N)$ et $\psi(M) = \ln(M)$ vont de $S(n)$ dans $S^+(n)$, resp. de $S^+(n)$ dans $S(n)$ et sont réciproques l'une de l'autre.

Q8 1. $f_M(X) = {}^t(AX)(AX) > 0$ pour $X \neq 0$ car alors $AX \neq 0$, A étant inversible. Donc $M = {}^tAA \in S^+(n)$.

2. Avec $N = \sqrt{M}$ et $P = AN^{-1}$, on obtient ${}^tPP = N^{-1t}AAN^{-1} = N^{-1}MN^{-1}$ or M et N commutent car N est un polynôme de M, d'où ${}^tPP = MM^{-1} = I_n$ et P est bien orthogonale.

3. Pour prouver l'unicité, il suffit de prouver que réciproquement si $A = PN$ avec $P \in O(n)$ et $N \in S^+(n)$ alors $N = \sqrt{M}$ car N est alors définie de manière unique et donc aussi $P = AN^{-1}$.

Or $N = {}^tPA \Longrightarrow N^2 = {}^tNN = {}^tAP^tPA = M$ d'où le résultat en utilisant le **Q6** 3.

Structure des groupes polaires

Q9 Si $A \in G$ alors ${}^tA \in G$, donc $M = {}^tAA \in G$ et par suite $N = \sqrt{M} \in G$ et $P = AN^{-1} \in G$.
D'autre part $G \cap O(n)$ est un sous-groupe comme intersection de deux sous-groupes (de $GL_n(\mathbf{R})$).

Q10 1. On va d'abord prouver que pour $A \in G$: $\det A = \pm 1$ ce qui prouvera que A est inversible :

$${}^tAJA = J \Longrightarrow \det J (\det A)^2 = \det J \Longrightarrow \det A = \pm 1$$

et finalement $G \subset GL_n(\mathbf{R})$.
D'autre part $I_n \in G$ donc G n'est pas vide et on vérifie encore facilement que pour $A, B \in G$:

$${}^t(AB)J(AB) = {}^tB({}^tAJA)B = {}^tBJB = J$$

donc $AB \in G$ et enfin pour $A \in G$:

$${}^tAJA = J \Longrightarrow J = ({}^tA)^{-1}JA^{-1} = {}^t(A^{-1})JA^{-1}$$

donc $A^{-1} \in G$. D'où le résultat : G est bien un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.

2. Pour $A \in G$, en écrivant $J^{-1} = \alpha J$ on obtient :

$$({}^tAJA)^{-1} = A^{-1}(\alpha J){}^t(A^{-1}) = \alpha J$$

donc ${}^t(A^{-1}) \in G$ et après inversion : ${}^tA \in G$.

3. Le polynôme p dont l'existence est vidente interpole par construction les racines carrées des valeurs propres λ de M et les racines carrées des valeurs propres $1/\lambda$ de M^{-1} donc $p(M) = \sqrt{M}$ et $p(M) = \sqrt{M^{-1}} = (\sqrt{M})^{-1}$.

4. Si $M \in G \cap S^+(n)$ alors $J = {}^tMJM = MJM \Longrightarrow M^{-1}J = JM$.
D'autre part pour tout $k \in \mathbf{N}$: M^k est encore dans G et est définie positive car ses valeurs propres sont les λ^k où λ est valeur propre de M donc sont toutes strictement positives. On peut alors appliquer l'égalité précédente à M^k ce qui fournit le résultat pour tout monôme puis par combinaison linéaire pour tout polynôme.

5. En appliquant la relation précédente avec le polynôme p du 3. on obtient :

$$(\sqrt{M})^{-1}J = J\sqrt{M} \Longleftrightarrow \sqrt{M} \in G$$

et finalement G est un groupe polaire en tenant compte des résultats déjà démontrés aux questions **Q9** et **Q10** 3.
Remarque : il semble bien que nulle part dans le problème l'hypothèse ${}^tJ = \varepsilon J$ ne soit utilisée. Peut-être s'agit-il seulement de cibler l'étude dans le cadre des automorphismes orthogonaux ou symplectiques.

Q11 1. $\widehat{G}$ est évidemment un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ de plus pour $N \in \widehat{G}$:

$${}^tNJ + JN = 0 \Longrightarrow J^{-1}({}^tNJ + JN)J^{-1} = 0 \Longrightarrow (\alpha J){}^tN + N(\alpha J) = 0$$

(avec $J^{-1} = \alpha J$) d'où ${}^tN \in \widehat{G}$.

2. $\frac{d}{dt}\left({}^tM(t)JM(t)\right) = {}^t\left(\frac{d}{dt}(M(t))\right)JM(t) + {}^tM(t)J\frac{d}{dt}(M(t)) = {}^tM(t)({}^tNJ + JN)M(t) = 0$.
Par suite :

$$\forall t \in \mathbf{R}\ {}^tM(t)JM(t) = {}^tM(0)JM(0) = J$$

car $M(0) = I_n$ (question **Q3**) et donc $M(t) \in G$.

3. Réciproquement, si $\forall t \in \mathbf{R}$ $M(t) \in G$ alors :

$$\forall t \in \mathbf{R}\ {}^tM(t)JM(t) = J \Longrightarrow \forall t \in \mathbf{R}\ \frac{d}{dt}\left({}^tM(t)JM(t)\right) = {}^tM(t)({}^tNJ + JN)M(t) = 0$$

et en particulier pour $t = 0$: ${}^tNJ + JN = 0$ donc $N \in \widehat{G}$.

Q12 1. Si l'on désigne comme dans la question **Q10** 3. par U l'ensemble des valeurs propres de M et leurs inverses, on peut construire un polynôme d'interpolation r tel que $r(\lambda) = \lambda^t$ pour tout $\lambda \in U$. Or les valeurs propres de M sont les valeurs $exp(\mu)$ où μ est valeur propre de $N \in S(n)$ telle que $\exp(N) = M$. De même les valeurs propres de $\exp(tN)$, resp. $\exp(-tN)$ sont les valeurs $exp(t\mu) = \lambda^t$, resp. $\exp(-t\mu) = \lambda^{-t} = (1/\lambda)^t$ donc, par construction :

$$\begin{cases} r(M) = \exp(tN) \\ r(M^{-1}) = \exp(-tN) \end{cases}$$

2. En appliquant la relation du **Q10** 4. au polynôme r, on trouve :

$$r(M^{-1})J = Jr(M) \iff \exp(-tN)J = J\exp(tN)$$

or $\exp(tN) \in S^+(n)$ et $(\exp(tN))^{-1} = \exp(-tN)$ (ce qu'on peut d'abord vérifier pour une matrice diagonale D en utilisant la question **Q3**). Donc $\exp(tN) \in G$ et ceci pour tout $t \in R$.

3. On vient de montrer (en utilisant de plus le résultat de la question **Q11** 3.) que, pour toute matrice $M \in G \cap S^+(n)$, l'unique matrice $N \in S(n)$ telle que $exp(N) = M$ est dans $\widehat{G} \cap S(n)$.

La bijectivité de l'application exp de $\widehat{G} \cap S(n)$ dans $G \cap S^+(n)$ en résulte.

Q13 Toute matrice $A \in G$ admet une décomposition polaire unique $A = PM$ avec $P \in G \cap O(n)$ et $M \in G \cap S^+(n)$ et M s'écrit de manière unique $M = \exp(N)$ avec $N \in \widehat{G} \cap S(n)$. C'est la bijectivité de l'application qui à $(P, N) \in H \times V$ associe $P\exp(N)$ où :

- H désigne le sous-groupe de $O(n)$ défini par $H = G \cap O(n)$.
- V désigne le sous-espace vectoriel de $S(n)$ défini par $V = \widehat{G} \cap S(n)$.

Exemple 1 :

1. $N \in V = \widehat{G} \cap S(n) \iff \begin{cases} N = {}^tN \\ NJ + JN = 0 \end{cases}$

En définissant N par blocs sous la forme $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, un produit par blocs élémentaire donne :

$$N \in V \iff \begin{cases} C = {}^tB \\ A = D = 0 \end{cases} \iff N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p,q}(\mathbf{R})$$

On en déduit que V et $M_{p,q}(\mathbf{R})$ sont isomorphes et finalement $\dim V = pq$.

2. De même $P \in H = G \cap O(n) \iff \begin{cases} {}^tPP = I_n \\ JP = PJ \end{cases}$

et en écrivant $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ on obtient : $\begin{cases} {}^tAA = I_p \text{ et } {}^tDD = I_q \\ C = B = 0 \end{cases}$

Finalement $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $(A, D) \in O(p) \times O(q)$, d'où le résultat.

Exemple 2 :

1. On obtient de la même manière :

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in V \iff \begin{cases} C = {}^tB \\ B = {}^tB \text{ et } D = -A \end{cases} \iff N = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \text{ avec } (A, B) \in M_m(\mathbf{R}) \times S(m)$$

On en déduit que V et $M_m(\mathbf{R}) \times S(m)$ sont isomorphes et finalement $\dim V = m^2 + \frac{m(m+1)}{2}$.

2. Le dernier calcul n'est pas plus difficile :

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H \iff \begin{cases} C = -B \text{ et } D = A \\ {}^tAA + {}^tBB = I_m \text{ et } {}^tAB = {}^tBA \end{cases}$$