ÉCOLE POLYTECHNIQUE–E.S.P.C.I.

CONCOURS D'ADMISSION 2000 **FILIÈRE PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

* * *

On se propose d'étudier une famille de polynômes (polynômes de Krawtchouk) et une famille de matrices (matrices d'adjacence du schéma d'association de Hamming) dont les propriétés sont liées, et applicables à la théorie des codes détecteurs et correcteurs d'erreurs dans la transmission de l'information.
(Ces applications ne sont pas abordées dans le problème.)
Les deux premières parties sont indépendantes.

* * *

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel non nul.
On prend par convention $0! = 1$. Si n et k sont des entiers naturels, on pose

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Première partie

1. Pour tout $k \in Z$, on définit le polynôme φ_k de la variable X par

$$\varphi_k(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{0 \leq i \leq k-1} (X - i) & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Évaluer $\varphi_k(j)$ pour chaque entier naturel j.

2. Pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N$, on définit le polynôme P_n de la variable X par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \varphi_k(X) \varphi_{n-k}(N - X).$$

a) Calculer P_0, P_1 et P_2.

b) Calculer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

c) Montrer que, pour chaque entier j tel que $0 \leq j \leq N$,

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k}.$$

3. Pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq N$, on considère la fonction f_j de la variable réelle u, définie par

$$f_j(u) = \sum_{n=0}^{N} P_n(j) u^n.$$

Montrer que $f_j(u) = (1-u)^j(1+u)^{N-j}$.

4. On considère la fonction F de deux variables réelles u et v, définie par

$$F(u,v) = \sum_{j=0}^{n} \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v).$$

a) Montrer que $F(u,v) = \alpha(1+uv)^\beta$, où α et β sont des constantes que l'on déterminera.
b) Soient a et b des entiers, $0 \le a \le N$, $0 \le b \le N$. Montrer que si $a \ne b$:

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = 0.$$

Évaluer $\dfrac{\partial^{2a} F}{\partial u^a \partial v^a}(0,0)$ en fonction de a et de N.

5. On note $\mathbf{R}_N[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N. Pour $P, Q \in \mathbf{R}_N[X]$, on pose

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} P(j) Q(j).$$

a) Montrer que $\langle . \mid . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_N[X]$.
b) Montrer que $\big(P_n\big)_{0 \le n \le N}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_N[X]$ muni de ce produit scalaire.

6. Montrer que, pour tout entier m tel que $1 \le m \le N-1$,

$$(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X) = 0.$$

[On calculera de deux manières différentes le coefficient de u_m dans $(1-u^2)\frac{df_j(u)}{du}$.]

Deuxième partie

On pose $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ et l'on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Pour chaque partie I de E, on note $\mathrm{Card} I$ le cardinal de I. Si I et J sont des parties de E, on pose

$$d(I,J) = \mathrm{Card}(I \triangle J),$$

où $I \triangle J$ est l'ensemble des points de la réunion $I \cup J$ qui n'appartiennent pas à l'intersection $I \cap J$.

7. **a)** À quelle condition a-t-on $d(I,J) = 0$?
À quelle condition a–t–on $d(I,J) = 1$?
b) Montrer que $d(I \triangle J, I) = \mathrm{Card} J$.

8. Soient I et J deux parties de E. On pose $d(I,J) = k$.
Calculer le nombre γ_j^k de parties A de E telles que $d(I,A) = 1$ et $d(J,A) = j$.

Troisième partie

On utilise dans cette partie les notations et les résultats des deux premières parties.
On suppose $\mathcal{P}(E)$ muni d'un ordre total $\preceq$.
On a donc $\mathcal{P}(E) = \{I_1, I_2, , \ldots, I_{2N}\}$ où $I_1 \preceq I_2 \preceq \cdots \preceq I_{2N}$.
Pour tout entier naturel n, on définit une matrice carrée réelle à 2^N lignes

$$A_n = \big((A_n)_{pq}\big)_{\substack{1\le p\le 2^N \\ l\le q\le 2^N}} \text{ par } (A_n)_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(I_p, I_q) = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\mathcal{J}$ la matrice identité à 2^N lignes.

9. **a)** Que vaut A_n pour $n > N$?
Expliciter A_0.
b) Montrer que pour tout entier m tel que $1 \le m \le N-1$,

$$A_1 A_m = (N-m+1)A_{m-1} + (m+1)A_{m+1}.$$

10. On pose $A = \dfrac{1}{2}(N\mathcal{J} - A_1)$.
Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n tel que $0 \le n \le N$,

$$A_n = P_n(A)$$

où les polynômes P_n sont ceux définis et étudiés dans la première partie.

11. Soit i un entier tel que $0 \le i \le N$. Montrer que si $I \in \mathcal{P}(E)$ est tel que $\mathrm{Card} I = i$ alors, pour tout entier j tel que $0 \le j \le N$,

$$P_j(i) = \sum_{\substack{J\in\mathcal{P}(E) \\ \mathrm{Card}J = j}} (-1)^{\mathrm{Card}(I\cap J)}.$$

12. **a)** Soient $I, J, K \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$(-1)^{\mathrm{Card}((I\triangle J)\cap K)} = (-1)^{\mathrm{Card}(I\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(J\cap K)}.$$

b) Soient $I, J \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\sum_{K\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{\mathrm{Card}(I\cap K)}(-1)^{\mathrm{Card}(J\cap K)} = \begin{cases} 2^N & \text{si } I = J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

13. Pour tout entier k tel que $0 \le k \le N$, on pose

$$B_k = \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N} P_k(n) A_n.$$

a) Montrer que

$$\begin{cases} (B_k)^2 = B_k & \\ B_k.B_l = 0 & \text{si } l \neq k. \end{cases}$$

[On pourra utiliser les résultats des questions **11.** et **12.**].
b) Déterminer la trace et le rang de chaque matrice B_k.

14. **a)** Pour chaque entier n tel que $0 \le n \le N$, trouver les valeurs propres de la matrice A_n.
b)Déterminer la dimension des sous-espaces propres de la matrice A_1.

* *
*