Corrigé math. ATS 2000

Problème 1

Partie A

1. Un déterminant d'ordre deux extrait de A_3 est non nul alors que $det(A_3) = 0$. Ceci montre que le rang de A_3 est 2. Le polynôme caractéristique de A_3 est:

$$\chi_{A_3}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2)$$

Les valeurs propres de A_3 sont donc 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Le sous-espace propre associé à 0 (noyau) a pour équation:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

C'est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (par le théorème du rang, on retrouve le fait que le rang est 2).

Le sous-espace propre associé à $\sqrt{2}$ a pour équation:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x + z = \sqrt{2}y \\ y = \sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x - z = 0 \end{cases}$$

C'est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Le sous-espace propre associé à $-\sqrt{2}$ a pour équation:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ x + z = -\sqrt{2}y \\ y = -\sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ x - z = 0 \end{cases}$$

C'est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Dans le cas général, avec la convention $x_0 = x_{n+1} = 0$, l'équation du sous-espace propre associé à λ est: $x_{i-1} + x_{i+1} = \lambda x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

On a donc, pour tout i compris entre 1 et n, $|\lambda||x_i| = |x_{i-1} + x_{.i+1}| \leq |x_{i-1}| + |x_{i+1}|$. Ceci vaut, en particulter, pour k tel que $|x_k| = Max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Dans ce dernier cas, de plus, $|x_k| > 0$ car un vecteur propre est non nul et, en divisant, on obtient: $|\lambda| \leq \frac{|x_{k-1}|}{|x_k|} + \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq 2$.

Partie B

1. Si une suite, non nulle, de puissances vérifie (R), alors, pour tout $k \geq 2$
$r^k = (2\cos\alpha)r^{k-1} - r^{k-2}$, ce qui, en divisant par r^{k-2}, équivaut à $r^2 - (2\cos\alpha)r + 1 = 0$.

Le discriminant de cette dernière équation est: $\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha = (2i\sin\alpha)^2$. Les solutions de l'équation sont donc: $r_1 = e^{i\alpha}$ et $r_2 = e^{-i\alpha}$.

2. Remarquons, tout d'abord, que la relation (R) est stable par combinaisons linéaires à coefficients, éventuellement, complexes. Or, en utilisant les relations de De Moivre et d'Euler, on obtient:

$$\sin(k\alpha) = \frac{e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}}{2i} = \frac{1}{2i}r_1^k - \frac{1}{2i}r_2^k$$

Ceci prouve que les suites réelles $(\sin(k\alpha))_{k\in N}$ sont des combinaisons linéaires de solutions de (R) et, par conséquent, des solutions de (R). Pour $k = 0$ on a $x_0 = 0$ et pour $k = 1$ on a $x_1 = \sin\alpha$ qui, compte tenu du choix de α, est non nul.

3. Un vecteur, propre X, de la matrice A_n, associé à la valeur propre $2\cos\alpha$, est caractérisé par: $A_nX = (2\cos\alpha)X$ et $X \neq 0$. Ce qui se traduit par $x_1 \neq 0$ et les équations: $x_2 = (2\cos\alpha)x_1$, $x_{n-1} = (2\cos\alpha)x_n$ et, pour $2 \leq k \leq n-1$, $x_{k-1} + x_{k+1} = (2\cos\alpha)x_k$. On peut synthétiser tout cela en une seule équation générale $x_{k+1} + x_{k-1} = (2\cos\alpha)x_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $x_1 \neq 0$ en rajoutant les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. D'après la question précédente, seule la condition $x_{n+1} = 0$ n'est pas obligatoirement vérifiée par les vecteurs de composantes $(\sin(k\alpha))_{1\leq k\leq n}$.

4. Les solutions, en α, de l'équation $\sin((n+1)\alpha) = 0$ sont $\alpha_j = \frac{j\pi}{n+1}$ où j est un entier relatif. On en déduit les n valeurs propres de A_n: $\lambda_j = 2\cos(\frac{j\pi}{n+1})$ et les vecteurs propres associés qui sont $X_j = \begin{pmatrix} \sin(\frac{j\pi}{n+1}) \\ \sin(\frac{2j\pi}{n+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{nj\pi}{n+1}) \end{pmatrix}$ où $1 \leq j \leq n$.

5. Si r est un entier naturel non multiple de $2n+2$ (*ici se trouve une erreur d'énoncé; on demandait de distinguer les cas r nul ou non nul au lieu de r multiple ou non de $2n+2$*) alors:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} e^{\frac{kr\pi i}{n+1}} = \sum_{k=0}^{2n+1} (e^{\frac{r\pi i}{n+1}})^k = \frac{1-(e^{\frac{r\pi i}{n+1}})^{2n+2}}{1-e^{\frac{r\pi i}{n+1}}} = \frac{1-e^{2r\pi i}}{1-e^{\frac{r\pi i}{n+1}}} = 0$$

Or

$$\sum_{k=0}^{2n+1} e^{\frac{kr\pi i}{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} (e^{\frac{k\pi i}{n+1}})^r + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (e^{\frac{k\pi i}{n+1}})^r = \sum_{k=0}^{n} (e^{\frac{k\pi i}{n+1}})^r + \sum_{k=1}^{n+1} (e^{\frac{(2n+2-k)\pi i}{n+1}})^r$$

La dernière somme s'obtient après le changement d'indice $k \leftarrow 2n+2-k$. Regroupons à présent:

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{\frac{k\pi i}{n+1}})^r + \sum_{k=1}^{n+1} (e^{\frac{(2n+2-k)\pi i}{n+1}})^r = 1 + \sum_{k=1}^{n} (e^{\frac{rk\pi i}{n+1}} + e^{\frac{-rk\pi i}{n+1}}) + (e^{-i\pi})^r = 1 + (-1)^r + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{rk\pi}{n+1}) = 0$$

Si r est un entier non multiple de $2n+2$, la somme cherchée est donc:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{rk\pi}{n+1}) = \frac{-1+(-1)^{r+1}}{2}$$

Si r est mutiple de $2n+2$ la somme vaut n.

6. Rappelons d'abord que, si $a \neq b$, on a: $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$. Dans ce cas:

$${}^t v_r v_s = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{rk\pi}{n+1}) \sin(\frac{sk\pi}{n+1}) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{(r-s)k\pi}{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{(r+s)k\pi}{n+1})\Big)$$

Rajoutons ici l'hypothèse (qui ne figure pas dans l'énoncé): $1 \leq r, s \leq n$. Elle ne restreint pas l'intérêt du calcul car son but est d'en déduire ${}^tPP$, par contre elle assure que, pour $r \neq s$, $r-s$ et $r+s$ ne sont pas multiples de $2n+2$.

Si $r \neq s$:

$$ {}^t v_r v_s = \frac{1}{2}\left(\frac{-1+(-1)^{r-s+1}}{2} - \frac{-1+(-1)^{r+s+1}}{2}\right) = 0 $$

car $(-1)^{r+s+1} = (-1)^{r-s+1}$ comme on peut le constater en effectuant le quotient qui vaut $(-1)^{2s} = ((-1)^2)^s = 1$).

Si $r = s$, alors, compte tenu que $\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$:

$$ {}^t v_r v_s = \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{rk\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2rk\pi}{n+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{-1+(-1)^{2r+1}}{2}\right) = \frac{n+1}{2} $$

7.

$$ {}^t PP = ({}^t v_r v_s)_{1 \leq r,s \leq n} = \frac{n+1}{2} I_n $$

8. On en déduit que ${}^t P = \frac{n+1}{2} P^{-1}$ puis:

$$ {}^t P A_n P = \frac{n+1}{2}\left(P^{-1} A_n P\right) = \frac{n+1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{\pi}{n+1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\cos(\frac{2\pi}{n+1}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\cos(\frac{n\pi}{n+1}) \end{pmatrix} $$

9. Il est clair que $C = A_5 - 2I_5$ et, par suite, l'équation $A_5 X = \lambda X$ est équivalente à $CX = (\lambda - 2)X$; les vecteurs propres de C et A_5 sont donc les mêmes et les valeurs propres de C s'obtiennent en ajoutant -2 à celles de A_5. Le spectre de C est:

$$ \left\{-2 + 2\cos(\frac{\pi}{6}), -2 + 2\cos(\frac{2\pi}{6}), -2 + 2\cos(\frac{3\pi}{6}), -2 + 2\cos(\frac{4\pi}{6}), -2 + 2\cos(\frac{5\pi}{6})\right\} $$

ou, en simplifiant

$$ \left\{-2 + \sqrt{3}, -1, -2, -3, -2 - \sqrt{3}\right\} $$

Un vecteur propre associé à $-2 + \sqrt{3}$ est $\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{2\pi}{6} \\ \sin\frac{3\pi}{6} \\ \sin\frac{4\pi}{6} \\ \sin\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Problème 2

Partie A

1.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\sin x)dx = \frac{\cos(2\pi)-\cos(\pi)}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f}(x)\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\sin x)\cos x dx = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\sin(2x))dx = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f}(x)\sin x dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\sin^2 x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (\cos 2x - 1)dx = \frac{-1}{2}$$

2.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{f}(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\sin x)\sin nx dx = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (\cos((n+1)x) - \cos((n-1)x)dx$$

Pour $n \geq 2$:

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} - \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\Big]_\pi^{2\pi} = 0$$

Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} (-\sin x)\cos nx dx = \frac{-1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)dx \\ =& \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\Big] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{-2}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est:

$$S_{\mathrm{f}}(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n \text{ pair} \\ n\geq 2}} \frac{\cos nx}{n^2-1} = \frac{1}{\pi} - \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos 2px}{4p^2-1}$$

3. La fonction f est 2π-pèriodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge et, en tout point de continuité, elle est égale à $\mathrm{f}(x)$. Comme f est continue en π, on a bien $S_{\mathrm{f}}(\pi) = \mathrm{f}(\pi)$ d'où:

$$\frac{1}{\pi} - \frac{\sin\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos 2p\pi}{4p^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$$

4.

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) + \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos 2px}{4p^2-1}$$

De par l'unicité du développement en série de Fourier, c'est le développement en série de Fourier de g.

Si $0 \leq x < \pi$, on a $\mathrm{g}(x) = \frac{\sin x}{2}$ et, si $\pi \leq x < 2\pi$ alors $\mathrm{g}(x) = -\frac{\sin x}{2}$. Comme, par ailleurs, g est 2π-périodique, sa coïncidence avec $|\frac{\sin x}{2}|$ sur un intervalle de longueur 2π, montre que, pour tout réel x: $\mathrm{g}(x) = \frac{|\sin x|}{2}$.

Partie B

1. Découpons l'intervalle $[0, 2\pi]$ en n intervalles $[t_i, t_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n-1$ avec $t_0 = 0$ et $t_n = 2\pi$), tels que h' soit définie et continue sur $]t_i, t_{i+1}[$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{h}'(x)dx = \mathrm{h}(t_{i+1}^-) - \mathrm{h}(t_i^+) = \mathrm{h}(t_{i+1}) - \mathrm{h}(t_i) \quad \text{car h est continue}$$

On en déduit que:

$$a_0(\mathrm{h}') = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{h}'(x)dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{h}(t_{i+1}) - \mathrm{h}(t_i) = \frac{\mathrm{h}(t_n) - \mathrm{h}(t_0)}{2\pi} = 0$$

Calculons maintenant, pour $n \geq 1$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{h}'(x)\cos nx dx = \Big[\cos nx\, \mathrm{h}(x)\Big]_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} + n\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{h}(x)\sin nx dx$$

h et cos étant continues, on en déduit après sommation:

$$a_n(\mathrm{h}') = \frac{\mathrm{h}(2\pi)\cos 2n\pi - \mathrm{h}(0)\cos 0}{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{h}(x)\sin nx dx = nb_n(\mathrm{h})$$

De manière analogue, on établit que $b_n(\mathrm{h}') = -na_n(\mathrm{h})$.

2. h' étant $\mathcal{C}^0$ par morceaux, d'après le théorème de Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\mathrm{h}'(x)]^2dx = a_0^2(\mathrm{h}') + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2(\mathrm{h}') + b_n^2(\mathrm{h}')}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2[a_n^2(\mathrm{h}) + b_n^2(\mathrm{h})]$$

Ceci montre, implicitement, la convergence de la dernière série et donne sa somme sous forme intégrale.

3. f est bien 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux car $\mathrm{f}'(x) = 0$ sur $]0, \pi[$ et $\mathrm{f}'(x) = -\cos(x)$ sur $]\pi, 2\pi[$. Les résultats précédents s'appliquent bien à f

Appliquons le théorème de Parseval à f:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\mathrm{f}(x)]^2dx = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

D'où:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}[\sin(x)]^2dx - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8}\Big) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

En appliquant les résultats de la question 2 à f:

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{4p^2}{(4p^2-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\mathrm{f}'(x)]^2dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}[\cos(x)]^2dx = \frac{1}{2}$$

D'où:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p^2}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}$$

Problème 3

Partie A

1. Une solution développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifie, dans son intervalle de convergence:

$$0 = 4x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}[(4n(n-1)+2n)a_n + a_{n-1}]x^{n-1}$$

En identifiant les coefficients du développement en série de droite avec ceux de la fonction nulle, on en déduit le résultat demandé.

2. On a, pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{-1}{2n(2n-1)}a_{n-1} = \frac{(-1)^2}{2n(2n-1)2(n-1)(2n-3)}a_{n-2} = \cdots = \frac{(-1)^n}{(2n)!}a_0$$

3. On constate que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = 0$. La règle de D'Alembert donne un rayon de convergence infini.

La condition $\mathrm{y}(0) = 1$ force $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$. D'où l'unicité de la solution satisfaisant à la condition initiale.

4. Pour $x \geq 0$:

$$\cos(\sqrt{x}\,) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \mathrm{y}_1(x)$$

Pour $x < 0$:

$$\mathrm{y}_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{-x}\,)$$

Partie B

1. Soit $\mathrm{y}(x) = \mathrm{k}(x)\,\mathrm{y}_1(x)$. Les deux premières dérivées sont: $\mathrm{y}'(x) = \mathrm{k}'(x)\,\mathrm{y}_1(x) + \mathrm{k}(x)\,\mathrm{y}_1'(x)$ et $\mathrm{y}'' = \mathrm{k}''(x)\,\mathrm{y}_1(x) + 2\,\mathrm{k}'(x)\,\mathrm{y}_1'(x) + \mathrm{k}(x)\,\mathrm{y}_1''(x)$. En reportant dans (E) obtient:

$$\begin{aligned} 4x[\mathrm{k}''(x)\,\mathrm{y}_1(x) + 2\,\mathrm{k}'(x)\,\mathrm{y}_1'(x) + \mathrm{k}(x)\,\mathrm{y}_1''(x)] + 2[\mathrm{k}'(x)\,\mathrm{y}_1(x) + \mathrm{k}(x)\,\mathrm{y}_1'(x)] + [\mathrm{k}(x)\,\mathrm{y}_1(x)] = \\ \mathrm{k}(x)[4x\,\mathrm{y}_1'' + 2\,\mathrm{y}_1'(x) + \mathrm{y}_1(x)] + \mathrm{k}'(x)[8x\,\mathrm{y}_1'(x) + 2\,\mathrm{y}_1(x)] + \mathrm{k}''(x)[4x\,\mathrm{y}_1(x)] = \\ 4x\,\mathrm{y}_1(x)\,\mathrm{k}''(x) + [8x\,\mathrm{y}_1'(x) + 2\,\mathrm{y}_1(x)]\,\mathrm{k}'(x) = 0 \end{aligned}$$

Ceci montre l'équivalence demandée et, en divisant par $\mathrm{k}'(x)$ l'égalité demandée.

On en déduit, pour $x > 0$, par intégration sur un intervalle où $\mathrm{k}'(x)|$ et $\mathrm{y}_1(x)$ ne s'annulent pas:

$$\ln|\,\mathrm{k}'(x)| = \ln\Big(\frac{1}{\sqrt{x}[\mathrm{y}_1(x)]^2}\Big) + Cste$$

D'où:

$$\mathrm{k}'(x) = \frac{C}{\sqrt{x}[\mathrm{y}_1(x)]^2} = \frac{C}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

Où C est une constante réelle et x varie sur un intervalle de réels positifs sur lequel $\cos\sqrt{x}$ ne s'annule pas.

2.

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

D'où:

$$\frac{d\tan\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$$

En appliquant le fait que deux primitives d'une même fonction, sur un même intervalle, diffèrent d'une constante, on en déduit que $\mathrm{k}(x)$ est de la forme $\alpha\tan\sqrt{x}+\beta$ sur tout intervalle du type $I_n =]\frac{n^2\pi^2}{4}, \frac{(n+2)^2\pi^2}{4}[$ où n est un entier naturel, α et β des constantes réelles.

3. En multipliant par $\mathrm{y}_1(x)$ on constate que les solutions sur I_n sont de la forme $\alpha_n\cos\sqrt{x}+\beta_n\sin\sqrt{x}$. En "recollant" les solutions aux bornes des I_n, on obtient, pour la continuité, $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ et pour la continuité de la la dérivée $\beta_n = \beta_{n+1}$; les solutions globales sur $]0,+\infty[$ sont bien de la forme $\mathrm{y}(x) = \alpha\cos\sqrt{x}+\beta\sin\sqrt{x}$.

on peut aussi établir ce résultat en vérifiant que les solutions proposées conviennent et en utilisant le théorème sur la dimension des solutions d'une équation différentielle linéaire.

4.

$$\mathrm{y}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\alpha\cos\sqrt{x} - \beta\sin\sqrt{x})$$

Si $\alpha \neq 0$ alors y' n'est pas prolongeable par continuité en 0. Par contre si $\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} = \frac{-\beta}{2}$ ce qui donne les fonctions de la forme $\mathrm{y}(x) = \beta\cos\sqrt{x}$ comme solution de (E) prolongeable par continuité en une fonction continûment dérivable en 0.

Il n'y a pas de solution satisfaisant aux conditions initiales demandées.