ESIGETEL 2000 PC Problème 1

Partie I

Notations et rappels :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$. On admet que :
$$W_n > 0 \text{ et } (2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$$
- pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1°) Pour $n \in \mathbf{N}$, on considère $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$.

1°)a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbf{N}, J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{2n+1} J_{n+1} - \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$$

1°)b) En déduire :

$$J_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}$$

puis :

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = -\frac{2}{(2n+2)^2}$$

1°)c) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, une expression de S_n en fonction de $\dfrac{J_n}{W_n}$ et $\dfrac{J_0}{W_0}$

2°)a) Expliquer rapidement pourquoi, pour tout $t \in [0, \pi/2], t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \sin(t)$.

2°)b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$$

Conclure que la série de terme général $\dfrac{1}{p^2}$ est convergente et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

2°)c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S'_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$. Exprimer S'_{2n+1} en fonction de S_n et de S_{2n+1}.

2°)d) Pourquoi la suite $(S'_n)_n$ est-elle convergente ? En déduire que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie II

1°)a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \forall q \in \mathbf{N}^*, \left| \ln(1+x) - \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} \right| \leqslant \frac{x^{q+1}}{q+1}$$

1°)b) Conclure que si $x \in [0,1]$, la série de terme général $(-1)^{p-1}\dfrac{x^p}{p}$ est convergente et expliciter la valeur de : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}$

2°) Soit $\varphi :]0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

2°)a) Montrer que φ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ en une fonction qui sera encore notée φ.

2°)b) En encadrant convenablement φ et en utilisant la fin de la Partie I, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x$.

3°)a) Montrer que :

$$n\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}n}{p(np+1)}$$

3°)b) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \left|\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}n}{p(np+1)} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \leqslant \frac{C}{n}$$

3°)c) Conclure que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$

4°) Pour tout $n \in N$, on considère $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

4°)a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et préciser sa limite.

4°)b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$ en fonction de n et de u_n.

4°)c) En déduire que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$