Concours EIA
Ecoles d'Ingénieurs associées

Session de mai 2002

Épreuve de Mathématiques - durée : 3 heures

Attention : - aucun document autorisé
- l'usage de la calculatrice est interdit
- l'épreuve comporte un problème

On attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision de la rédaction.

Partie A

1. Soit f une fonction définie et continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles. On définit les nombres réels I_n par :
$$I_0 = \int_0^1 f(t)dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt.$$
   a. Montrer que les intégrales I_n sont toutes définies.
   b. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$. On définit les nombres réels I_n comme dans la question précédente.
   a. Calculer I_0.
   b. Montrer que toutes les intégrales I_n sont convergentes.
   c. Sans calculer I_n, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   d. Calculer I_n puis retrouver le résultat précédent.

Partie B

Soit E l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x continues sur $[0,+\infty[$.
On considère les fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2 définies par :
$$\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_2(x) = x^2 \\ g_1(x) = x\ln x \\ g_2(x) = x^2 \ln x \end{cases}$$

1. Montrer que les deux fonctions g_1 et g_2 peuvent être prolongées par continuité à l'intervalle $[0,+\infty[$.
   Par la suite, on notera g_1 et g_2 leurs prolongements respectifs à $[0,+\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de ces fonctions g_1 et g_2 sur $[0,+\infty[$.
3. a. Étudier les variations des fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2.
   b. Étudier les positions relatives des courbes représentatives de ces fonctions ; on présentera les résultats sous forme de tableau.
   c. Déterminer les équations des tangentes aux courbes représentatives de g_1 et g_2 au point d'abscisse 1.
4. Construire avec précision, dans un plan rapporté à un même repère, les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, g_1 et g_2.

Partie C (Sous-espaces vectoriels de E)

On considère les ensembles E_1 et E_2 définis par :
$$E_1 = \text{Vect } \{f_1, g_1\} \text{ et } E_2 = \text{Vect } \{f_1, g_1, f_2, g_2\}.$$

1. Détermination d'une base de E_1.

a. Démontrer que (f_1, g_1) est une famille libre de E_1.

b. En déduire une base de E_1 puis la dimension de E_1.

2. Détermination d'une base de E_2.
Soient α, β, γ et δ quatre nombres réels tels que : $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma g_1 + \delta g_2 = 0$.

   a. Montrer que cette égalité conduit à :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[\,, \frac{\alpha}{x \ln x} + \frac{\beta}{\ln x} + \frac{\gamma}{x} + \delta = 0.$$

   En déduire la valeur de δ.

   b. Démontrer que (f_1, g_1, f_2, g_2) est une famille libre de E.

   c. En déduire la dimension de E_2.

Partie D (Etude d'un endomorphisme de E_2)

Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \varphi(f) : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^1 f(xt)dt.$$

1. Démontrer que φ est une application linéaire de E dans E.
2. Montrer que, pour toute fonction f élément de E, la fonction $\varphi(f)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa fonction dérivée en fonction de f et de $\varphi(f)$.
3. En déduire la résolution de l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = f(x)$ où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et f un élément de E.
4. Matrice de φ.
   a. Déterminer les images par φ des éléments de la base (f_1, f_2, g_1, g_2) de E_2.
   Dans la suite du problème, on notera φ la restriction de φ à E_2.
   b. En déduire la matrice A de φ dans cette base.
5. Soit f un élément de E_2 ; exprimer, en fonction des coordonnées de f dans la base (f_1, g_1, f_2, g_2), les solutions de l'équation $xy'(x) + y(x) = f(x)$.

Partie E (Etude des composées φ^n de φ)

1. Montrer que φ est bijective, puis déterminer la matrice de sa réciproque dans la base (f_1, f_2, g_1, g_2) de E_2.
2. On définit $\varphi^0 = Id_{E_2}$, et pour tout entier naturel n : $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$.
Démontrer que $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & a_n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 & b_n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$ où a_n et b_n sont les termes de deux suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$a_0 = b_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

3. a. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}, 4a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$.
   b. En déduire l'expression générale des termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
4. a. Déterminer les coefficients α, β et γ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha b_{n+2} + \beta b_{n+1} + \gamma b_n = 0$.
   b. En déduire l'expression générale des termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Partie F (Etude du comportement de $\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi^k$ quand n tend vers $+\infty$)

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $h(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
   a. Calculer $h(1)$.
   b. Démontrer que pour tout x réel : $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=p}^{n-1} x^k$.
   c. En déduire, pour tout x réel différent de 1 l'égalité suivante :
$$h(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$
2. Déterminer la matrice B_n de $\Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi^k$ dans la base (f_1, f_2, g_1, g_2) de E_2.
3. a. Déterminer la limite des suites définissant les coefficients de B_n. On notera B la matrice ainsi obtenue.
   b. Montrer que B est inversible et déterminer sa matrice inverse B^{-1}.
   c. Déterminer les valeurs propres de B puis les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. B est-elle diagonalisable ?

FIN DE L'ÉNONCÉ