(version dimanche 19 mai 2002 : 7h02)

CONCOURS CENTRALE- SUPÉLEC 2 mai 2002 8h-12h : Mathématiques première épreuve Filière MP

Préliminaires et objectifs du problème

On rappelle que $\mathbb{N}^* = \backslash\{0\}$ et que $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué par les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

On munit l'algèbre $C([-1,1],\mathbb{C})$ des fonctions à valeurs complexes continues sur le segment $[-1,1]$ de la norme $||\ ||_\infty$ de la convergence uniforme, définie par $(\forall f \in C([-1,1],\mathbb{C}))$, $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est identifié à la fonction polynomiale qu'il induit sur $[-1,1]$.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

• On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ elle est dominée par la suite $(n^{-k})_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est à dire si $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\exists M_k \in \mathbb{R}_+)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\lambda_n \leq \frac{M_k}{n^k}$.

On note $\mathcal{F}_\infty$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
- la suite $(||f - Q_n||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide .

• On dit que cette suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle si, pour un certain réel $r \in]0,1[$, elle est dominée par la suite géométrique $(r^n)_{nh\in\mathbb{N}}$, c'est à dire si $(\exists r \in]0,1[)$, $(\exists M \in \mathbb{R}_+)$, $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\lambda_n \leq Mr^n$.

On note $\mathcal{F}_{exp}$ l'ensemble des fonctions $f \in C([-1,1],\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$
- la suite $(||f - Q_n||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle .

Remarque : Une suite à décroissance rapide (respectivement exponentielle) converge vers 0 mais n'est pas forcément décroissante.

L'objectif du problème est de montrer, en utilisant les propriétés des polynômes de TCHEBYCHEV établies en partie I, que les fonctions de l'ensemble $\mathcal{F}_\infty$ sont exactement les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ et de relier les fonctions f de l'ensemble $\mathcal{F}_{exp}$ aux fonctions f dont la série de TAYLOR $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n$ en tout point $a \in [-1,1]$ converge vers $f(x)$ sur un voisinage de a.

(a) Vérifier que si une suite est à décroissance exponentielle alors elle est à décroissance rapide.

(b) Vérifier que les ensembles $\mathcal{F}_\infty$ et $\mathcal{F}_{exp}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$. Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre ces deux sous-espaces ?

(c-i) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$ dont toutes les dérivées sont bornées sur $[-1,1]$ par un même réel M. Montrer que $f \in \mathcal{F}_{exp}$.

(c-ii) Donner des exemples de fonctions de $\mathcal{F}_{exp}$.

Partie I -Polynômes de TCHEBYCHEV

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose : $(\forall x \in [-1,1])$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

(I-A) **Premières propriétés des $\mathbf{T_n}$**

(I-A-1) Montrer que T_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers. Le polynôme associé est encore noté T_n et s'appelle le $n-$ème polynôme de TCHEBYCHEV.

(I-A-2) Expliciter $T_1,\ T_2,\ T_3,$ et T_4.

(I-A-3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.

(I-A-4) En déduire la parité, le degré et le coefficient dominant de T_n.

(I-A-5) Écrire un algorithme pour calculer $T_n(X)$.

On pourra employer le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé ou un langage naturel non ambigu.

(I-A-6) Montrer que, pour tout $t \in [0,\pi]$, on a : $T_n(\cos t) = \cos nt$.

(I-B)**Calcul des normes**

(I-B-1) Calculer $||T_n||_\infty$.

(I-B-2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|\sin nu| \leq n|\sin u|$.

(I-B-3) En déduire $||T_n'||_\infty = n^2$.

(I-C) **Encadrement de $\mathbf{T_n(x)}$ sur $[\mathbf{1}, +\infty[$**

(I-C-1) Montrer que $(\forall r \in \mathbb{R}^*),\ T_n(\frac{r+r^{-1}}{2}) = \frac{r^n+r^{-n}}{2}$.

(I-C-2) Soit un réel $x \in [1, +\infty[$.

(I-C-2-a) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^*$, tel que $x = \frac{r+r^{-1}}{2}$.

(I-C-2-b) En déduire que $1 \leq T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2-1})^n$.

(I-D) **Équation différentielle vérifiée sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{T_n}$**

(I-D-1) En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0, \pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

(I-D-2) Soit $k \in \mathbb{N},\ k \leq n$. Déduire de la question (1-D-1) que $T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}$. Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k}T_n^{(k)}(1)$.

Partie II -Application des polynômes de TCHEBYCHEV à la majoration des polynômes et de leurs dérivées

On introduit la subdivision $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ du segment $[-1, 1]$ définie par $\forall j \in [0, n],\ a_j = \cos\left[(1 - \frac{j}{n})\right]$.

Par ailleurs pour tout $i \in [0, n]$ on appelle $E_i = [0, n]\backslash\{i\}$ l'ensemble des entiers naturels autres que i qui sont inférieurs ou égaux à n.

Enfin, pour tout $i \in [0, n]$ on note $L_i(X) = \dfrac{\prod_{j\in E_i}(X - a_j)}{\prod_{j\in E_i}(a_i - a_j)}$ le $i-$ème polynôme de LAGRANGE associé à la subdivision σ.

(II-A) **Majoration d'un polynôme sur $[\mathbf{1}, +\infty[$**

(II-A-1) Résoudre sur $[-1, 1]$ l'équation $|T_n(x)| = 1$ et calculer $T_n'(a_j)$ pour $j = n$, pour $j = 0$ puis pour $j \in [1, n-1]$.

(II-A-2) Montrer que $T_n(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}L_i(X)$.

(II-A-3) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que $T_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|$.

(II-A-4) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $(\forall x \in [1, +\infty[),\ \ |P(x)| \leq ||P||_\infty(x + \sqrt{x^2+1})^n$.

(II-B) **Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[\mathbf{1}, +\infty[$**

(II-B-1) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que $(\forall k \in [1, n],),\ T_n^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}|L_i^{(k)}(x)|$.

(II-B-2) Soit $P(X)$ un polynôme appartenant à $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $(\forall k \in [1, n],\ (\forall x \in [1, +\infty[),\ \ |P^{(k)}(x)| \leq ||P||_\infty T_n^{(k)}(x)$.

(II-C) **Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$**

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On considéere un entier $k \in [1, n]$.

(II-C-1) On pose $(\forall \lambda \in [-1, 1]),\ P_\lambda(X) = P(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2})$ avec $\varepsilon = 1$ si $\lambda \in [0, 1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1, 0[$. Montrer que $|P_\lambda^{(k)}(1)| = \left(\frac{|\lambda|+1}{2}\right)^k|P^{(k)}(\lambda)|$.

(II-C-2) En déduire que $||P^{(k)}||_\infty \leq 2^k T_n^{(k)}(1)||P||_\infty$.

(II-C-3) Montrer que : $||P^{(k)}||_\infty \leq 2^{2k}\frac{k!}{(2k)!}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}||P||_\infty$ et que, si $k = 1$, on a la majoration plus fine $||P'||_\infty \leq 2n^2||P||_\infty$.

Partie III - Détermination de l'ensemble $\mathcal{F}_\infty$

On note $C_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. On munit $C_{2\pi}$ de deux normes, la norme quadratique N_2 définie pour $\varphi \in C_{2\pi}$ par $N_2(\varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ induite par le produit scalaire hermitien $(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\varphi(t)}\psi(t)dt$ et la norme N_∞ de la convergence uniforme définie par $\mathbb{N}_\infty(\varphi) = \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|\varphi(t)|$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ on pose $e_k : t \mapsto e^{ikt}$. On rappelle que la famille $(e_k)_{k_i n\mathbb{Z}}$ est une famille orthogonale de l'espace pré-hilbertien $(X_{2\pi}, N_2)$ et que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le $k-$ème coefficient de FOURIER d'une fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est le complexe $c_k(\varphi) = (e_k|\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)e^{-ikt}dt$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note τ_n le sous espace vectoriel de $C_{2\pi}$ engendré par les fonctions e_k où $k \in [-n, n]$: $\tau_n = vect(e_{-n}, ..., e_0, ...e_n)$; $dim(\tau_n) = 2n+1$.

Soit $\varphi \in C_{2\pi}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(\varphi)e_k$ le $n-$ième polynôme trigonométrique de FOURIER de φ.

(III-A) **Propriétés liées aux normes $\mathbf{N_2}$ et $\mathbf{N_\infty}$**

(III-A-1) On suppose que la série $\sum_{n\geq 1}(|c_n(\varphi)| + |c_{-n}(\varphi)|)$ converge. Montrer que la suite $(S_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ.

(III-A-2) Soit $\varphi \in C_{2\pi}$ muni de la norme quadratique N_2. On rappelle que $S_n(\varphi)$ est la projection orthogonale de φ sur τ_n. En déduire que : $(\forall \omega \in \tau_n \backslash \{S_n(\varphi)\})$, $N_2(\varphi - \omega) > N_2(\varphi - S_n(\varphi))$.

(III-A-3) On suppose que la fonction $\varphi \in C_{2\pi}$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, avec $p \geq 1$. Montrer que $(\forall k \in \mathbb{Z}^*)$, $|c_k(\varphi)| \leq \frac{N_\infty(\varphi^{(p)}}{|k|^p}$.

(III-B) **Étude d'une application linéaire**

On rappelle que $C([-1,1], \mathbb{C})$ est muni de la norme $|| \; ||_\infty$. On note L l'application linéaire qui à toute fonction f de $C([-1,1), \mathbb{C})$, associe la fonction Lf de $C_{2\pi}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R} \; Lf(t) = f(\cos t)$.

Montrer que L est injective et calculer la norme subordonnée $|||L|||_\infty$ de L lorsque l'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_∞ puis la norme subordonnée $|||L|||_2$ de L lorsqu'on munit $C_{2\pi}$ de la norme N_2.

(III-C) **Propriétés liées aux coefficients de FOURIER d'une fonction Lf**

Dans cette section on considère une fonction f fixée dans $C([-1,1], \mathbb{C})$.

(III-C-1) Vérifier que $c_{-k}(Lf) = c_k(Lf)$.

(III-C-2) Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que : $(\forall k \geq 2)$, $|c_k(Lf)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}||f - Q_{k-1}||_\infty$.

(III-C-3) Pour tout entier $n_i n\mathbb{N}$ on pose : $(\forall x \in [-1,1])$, $U_n(f)(x) = S_n(Lf)(\arccos x)$. Montrer que $U_n(f) = c_0(Lf) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)T_k$.

(III-C-4) On suppose que la série $\sum_{k\geq 1}|c_k(Lf)|$ converge. Montrer que $||f - U_n(f)|| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty}|c_k(Lf)|$.

(III-D) **Développement en série de TCHEBYCHEV d'une fonction f de $\mathcal{F}_\infty$**

On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{F}_\infty$.

(III-D-1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

(III-D-2) Montrer que $(\forall x \in [-1,1])$, $f(x) = c_0(Lf) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n$ et que la série de fonctions converge normalement sur $[-1,1]$.

(III-D-3) En déduire que f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ et que $(\forall k \in \mathbb{N})$, $(\forall x \in [-1,1])$, $f^{(k)}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x)$.

(III-E) **Achèvement de la détermination de l'ensemble $\mathcal{F}_\infty$.**

On suppose dans cette question de f est une fonction de classe C^∞ sur $[-1,1]$.
(III-E-1) Montrer que la suite $(|c_n(Lf)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide.

(III-E-2) En déduire que $f \in \mathcal{F}_\infty$.

Partie IV Étude de l'ensemble $\mathcal{F}_{exp}$

(IV-A) **Caractérisation des éléments de l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$**
(IV-A-1) Soit f une fonction de $C([-1,1],\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : (a) $f \in \mathcal{F}_{exp}$ (b) La suite $(|c_n(Lf)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle.

(IV-B) **Développement en série de TCHEBYCHEV d'une fonction f de $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$**
On suppose dans cette question que f est une fonction de l'ensemble $\mathcal{F}_{exp}$. Il existe alors un réel $r \in]0,1[$ tel que : $(\exists M \in \mathbb{R}_+),\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ |c_n(Lf)| \leq M r^n$.

(IV-B-1) Justifier le fait que : $(\forall x \in [-1,1], f(x) = c_0(Lf) + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n$, que la série de fonctions converge normalement sur $[-1,1]$, que f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ et que $(\forall k \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [-1,1]),\ f^{(k)}(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x)$.

(IV-B-2) En déduire que $(\forall k \in \mathbb{N}),\ ||f^{(k)}||_\infty \leq \frac{2M}{1-r}\cdot\frac{k!}{[\lambda(r)]^k}$, avec $\lambda(r) = \frac{(1-r)^2}{4r}$.

(IV-C) **Développement en série de TAYLOR au voisinage de tout point $\mathbf{a} \in [-\mathbf{1},\mathbf{1}]$ d'une fonction f de $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$**
On conserve les mêmes hypothèses qu'à la question précédente pour f. Soit un point $a \in [-1,1]$.

Montrer que la série de TAYLOR $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ de f au point a converge vers $f(x)$ sur le voisinage $[-1,1] \cap]a-\lambda(r), a+\lambda(r)[$ du point a.

(IV-D) **Inclusion stricte entre $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$ et $\mathcal{F}_\infty$**
Montrer que la fonction f définie par $(\forall x \in [-1,1]\backslash\{0\},\ f(x) = exp(-\frac{1}{x^2})$ et $f(0) = 0$ appartient à $\mathcal{F}_\infty$ mais n'appartient pas à $\mathcal{F}_{exp}$.

(IV-E) **Réciproque partielle concernant la détermination de l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$**
Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes développable en série entière sur un intervalle ouvert $]-\rho,+\rho[$, avec $\rho > 1$. Montrer que la restriction de f au segment $[-1,1]$ appartient à $\mathcal{F}_{exp}$.

FIN DU PROBLÈME