

CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2002

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

Préliminaire

- 1- Soit $f : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{1 - \cos(t)}$, t appartenant à $]0, \pi]$.

Etudier la limite de f en 0.

En déduire l'existence de $I = \int_0^{\pi} f(t) dt$.

- 2- Soit α un réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$ et soit g une application 2π périodique vérifiant $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $g(x) = \cos(\alpha x)$.
Déterminer la série de Fourier de g .
En déduire une expression de $\cotan(\theta)$ comme somme d'une série de fonctions.

Partie I

- 1- Montrer que $u \mapsto \ln(\sin(u))$ et $u \mapsto \ln(\cos(u))$ sont intégrables sur $]0, \pi/2[$.

- 2- On note $K = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du$ et $L = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)) du$

a- Montrer que $K = L$

b- En exprimant $K + L$ de deux manières différentes, déduire la valeur de K .

- 3- Exprimer I en fonction de K . En déduire la valeur de I .

Partie II

On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Tournez la page S.V.P.

1- Soit $v_n = 1 - n \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

2- Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies par :

$$u_n(x) = \frac{2x^2}{x^2 - n^2} \text{ pour } x \text{ appartenant à } [0, \frac{1}{2}]$$

Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ est normalement convergente sur $[0, \frac{1}{2}]$

On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $\Sigma = \int_0^{1/2} S(x) dx$.

Justifier l'existence de Σ .

3- -a- Ecrire Σ sous forme d'une série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

-b- On note Σ_N la somme partielle $\sum_{n=1}^N a_n$. Simplifier l'expression de Σ_N . En déduire la valeur de Σ

4- A l'aide du préliminaire, trouver une relation liant Σ et I . Retrouver la valeur de I .

Partie III

Soit h la fonction $(x, t) \mapsto \frac{xt \sin(t)}{x^2 - 2x \cos(t) + 1}$.

1- Montrer que l'application $H : x \mapsto \int_0^\pi \frac{xt \sin(t)}{x^2 - 2x \cos(t) + 1} dt$ est continue sur $[0, 1]$.

2- Déterminer les suites $s = (s_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+2} - 2 \cos(t) s_{n+1} + s_n = 0$$

t étant un réel donné de $]0, \pi[$.

3- Prouver sans calcul que l'application $x \mapsto h(x, t)$, $t \in [0, \pi]$, est développable en série entière au voisinage de 0.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) x^n$ le développement en série entière et R le rayon de convergence. En

utilisant la relation :

$$(1 - 2 \cos(t) x + x^2) h(x, t) = t \sin(t) x$$

déterminer l'expression de $a_n(t)$. Que peut-on dire de R ?

4- Soit x un réel fixé dans $[0, 1[$.

-a- Montrer que la série $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

-b- En déduire que H est développable en série entière au voisinage de 0.

-c- Exprimer $H(x)$ à l'aide de fonctions élémentaires pour x appartenant à $[0, 1[$, et retrouver la valeur de l'intégrale I .

Partie IV

1- Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) : x y'(x) + y(x) = -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Résoudre (E) sur $]0, 1[$.

2- Existe-t-il une solution de (E) se prolongeant par continuité sur $[0, 1]$?

3- Soit $\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t \sin(t)}{1-x \cos(t)} dt$.

-a- Montrer que ϕ est une application continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$

-b- Montrer que ϕ est solution sur $]0, 1[$ de (E).

-c- Retrouver la valeur de I .

_____ Fin de l'énoncé _____