UC 213 J. 2026

SESSION 2002

Filière MP

MATHÉMATIQUES

(Epreuve commune aux ENS de Paris et Cachan)

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

Notations. On note l'ensemble des nombres réels par $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels positifs par $\mathbb{R}_+$, l'ensemble des nombres complexes par $\mathbb{C}$, l'ensemble des entiers relatifs par $\mathbb{Z}$, des entiers positifs par $\mathbb{N}$ et des entiers strictement positifs par $\mathbb{N}^*$. Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et tout réel a, on note $f(\cdot + a)$ la fonction g définie pour tout réel t par $g(t) = f(t+a)$. On note $\overline{f}$ la fonction conjuguée de f définie pour tout réel t par $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$.

On désigne par $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et par $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout f de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on note $||f||$ le nombre $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_p;\ p \geq 1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ *converge uniformément* sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f si et seulement si $\lim_{p\to\infty} ||f_p - f|| = 0$. On rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni de la norme $||\cdot||$ est un espace vectoriel normé complet.

On rappelle la définition de l'uniforme continuité: on dit qu'une fonction F de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{C}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0\ ,\quad \forall t, s \in \mathbb{R}\ (\text{resp. } \mathbb{C})\ ,\quad |t-s| \leq \delta \Longrightarrow |F(t) - F(s)| < \epsilon\ .$$

En particulier si f est un élément de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, f est uniformément continue si et seulement si:

$$\lim_{h\to 0} ||f(\cdot + h) - f|| = 0\ .$$

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que le réel r est une période de f si r est non-nul et si pour tout réel t, on a $f(t+r) = f(t)$. On note $\mathcal{A}_r$ l'ensemble des fonctions de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ admettant r pour période et on note $\mathcal{A}$ la réunion des ensembles $\mathcal{A}_r$, r parcourant l'ensemble des réels non-nuls. $\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions périodiques de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit I un intervalle d'extrémités a et b. On définit la longueur de I que l'on note $\ell(I)$ comme le nombre $b - a$. Pour tout intervalle borné non-vide I on définit $d(I) = \sup_{x\in I} |x|$. On admet que:

$$d(I) \geq \frac{1}{2}\ell(I)\ .$$

Soit r un réel non-nul et soit g un élément de $\mathcal{A}_r$. On rappelle que pour tout réel T:

$$\int_{T-r/2}^{T+r/2} g(t)dt = \int_{-r/2}^{r/2} g(t)dt\ .$$

Pour tout réel λ, on désigne par e_λ la fonction de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie pour tout réel t par $e_\lambda(t) = \exp(i\lambda t)$. Pour tout réel $r > 0$, tout g de $\mathcal{A}_r$ et tout k de $\mathbb{Z}$, on définit le k-ième coefficient de Fourier de g par:

$$c_k(g) = \frac{1}{r}\int_{-r/2}^{r/2} g(t) e_{\frac{2\pi k}{r}}(-t)dt\ .$$

On rappelle la formule de Parseval:

$$\forall g \in \mathcal{A}_r\ ,\qquad \frac{1}{r}\int_{-r/2}^{r/2} |g(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(g)|^2 \tag{i}$$

Question préliminaire 1 Montrer que la fonction $e_1 + e_{\sqrt{2}}$ n'est pas dans $\mathcal{A}$.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que E est *bien réparti* si et seulement si il existe un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un élément de E.

Soient f dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. On dit qu'un réel r est une *ϵ-quasi période* de f si r est non-nul et si:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+r) - f(t)| \leq \epsilon .$$

On note $E(f, \epsilon)$ l'ensemble des ϵ-quasi périodes de f (il est possible que cet ensemble soit vide). On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une *fonction presque périodique* si et seulement si f est un élément de $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $E(f, \epsilon)$ est bien réparti pour tout $\epsilon > 0$. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions presque périodiques.

Question préliminaire 2 Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

PARTIE I

1 Soit f dans $\mathcal{B}$. Il existe donc un réel $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un élément de $E(f, 1)$. Montrer que pour tout k dans $\mathbb{Z}$:

$$\sup_{t \in [kl, (k+1)l]} |f(t)| \leq 1 + \sup_{t \in [-l, l]} |f(t)| .$$

En déduire que toute fonction presque périodique est dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ·

2-a Montrer que si f est dans $\mathcal{B}$ alors $\overline{f}$, f^2 et $|f|^2$ le sont également.

2-b Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uniformément continue. Montrer que $F \circ f$ est dans $\mathcal{B}$ dès que f l'est.

3 Soit $(f_n;\ n \geq 1)$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que pour tout réel a et tout n dans $\mathbb{N}$:

$$||f(\cdot + a) - f|| \leq 2||f_n - f|| + ||f_n(\cdot + a) - f_n|| .$$

En déduire que f est dans $\mathcal{B}$.

4 Soit f dans $\mathcal{B}$. Soient h et ϵ deux réels strictement positifs. Soit a dans $E(f, \epsilon)$. Montrer que pour tout réel t on a:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq 2\epsilon + |f(t - a + h) - f(t - a)| .$$

En déduire que toute fonction presque périodique est uniformément continue.

On dit qu'une fonction f de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est *normale* si et seulement si de toute suite de réels $(a_n;\ n \geq 1)$ on peut extraire une sous-suite $(a_{n_j};\ j \geq 1)$ telle que la suite de fonctions $(f(\cdot + a_{n_j});\ j \geq 1)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions normales. Le but des questions **5** et **6** est de montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{N}$.

5 On cherche tout d'abord à montrer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$. On fixe f dans $\mathcal{B}$ et $(a_n;\ n \geq 1)$, une suite réelle.

5-a Soit ϵ un réel strictement positif. Il existe $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contient un élément de $E(f, \epsilon/3)$. Montrer qu'il existe une suite $(b_n;\ n \geq 1)$ à valeurs dans $[0, l]$ telle que d'une part:

$$a_n - b_n \in E(f, \epsilon/3) \ ,$$

et d'autre part:

$$\forall m, n \geq 1 \ , \quad ||f(\cdot + a_n) - f(\cdot + a_m)|| \leq \frac{2\epsilon}{3} + ||f - f(\cdot + b_n - b_m)|| \ .$$

5-b Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une sous-suite $(a_{n_j};\ j \geq 1)$ (dépendant de ϵ) telle que

$$\forall i, j \geq 1 \ , \quad ||f(\cdot + a_{n_j}) - f(\cdot + a_{n_i})|| \leq \epsilon \ .$$

(Indication: penser à extraire de $(b_n;\ n \geq 1)$ une sous-suite convergente et à utiliser l'uniforme continuité de f.)

5-c Montrer par récurrence qu'il existe une famille de suites strictement croissantes d'indices $(n_j^{(p)};\ j \geq 1)$, $p \in \mathbb{N}^*$ telle que:

$$\forall p \geq 1 \ , \quad \{n_j^{(p+1)};\ j \geq 1\} \subset \{n_j^{(p)};\ j \geq 1\}$$

et

$$\forall p, i, j \geq 1 \ , \quad ||f(\cdot + a_{n_j^{(p)}}) - f(\cdot + a_{n_i^{(p)}})|| \leq \frac{1}{p} \ .$$

En déduire que $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ (considérer la suite $(a_{n_p^{(p)}};\ p \geq 1)$).

6 On cherche ensuite à montrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde: supposons qu'il existe f, un élément de $\mathcal{N}$ qui ne soit pas dans $\mathcal{B}$.

6-a Montrer qu'il existe un réel $\epsilon_0 > 0$ et une suite d'intervalles bornés $(I_n;\ n \geq 1)$ tels que $\ell(I_1) \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$:
- I_n est inclus dans le complémentaire de $E(f, \epsilon_0)$;
- $\ell(I_{n+1}) > 5\,(d(I_1) + \ldots + d(I_n))$.

(On rappelle que pour tout intervalle borné I, on a posé $d(I) = \sup_{x \in I} |x|$.)

6-b Montrer qu'il existe une suite de réels $(\alpha_n;\ n \geq 1)$ telle que $\alpha_1 \in I_1$ et pour tout $n \geq 1$:
- α_{n+1} est dans I_{n+1} mais pas dans $I_1 \cup \ldots \cup I_n$;
- l'intervalle fermé de longueur $2(d(I_1) + \ldots + d(I_n))$ centré en α_{n+1} est inclus dans I_{n+1} .

6-c Montrer que pour tous i, j entiers distincts plus grands que 1, $\alpha_i \neq \alpha_j$ et

$$\alpha_i - \alpha_j \notin E(f, \epsilon_0) \ .$$

Conclure.

7-a Montrer que si f et g sont dans $\mathcal{B}$ alors fg et $f + g$ le sont également (utiliser le fait que $\mathcal{N} = \mathcal{B}$).

7-b On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de la forme $a_1 e_{\lambda_1} + a_2 e_{\lambda_2} + \ldots + a_n e_{\lambda_n}$, pour n variant dans $\mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ dans $\mathbb{C}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

8-a Soit $(a_n;\ n \geq 1)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$. Montrer que la série de fonctions $g = \sum_{n\geq 1} a_n e_{1/n}$ est bien définie et appartient à $\mathcal{B}$.

8-b Montrer que:

$$\forall n \geq 1\ , \quad \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t) e_{1/n}(-t)dt = a_n\ .$$

(Justifier soigneusement la réponse.)

8-c Montrer ensuite que g est périodique si et seulement si la suite $(a_n;\ n \geq 1)$ est nulle à partir d'un certain rang.

Dans les parties II et III, on admet que l'ensemble $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{B}$ pour la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire:

$$\forall f \in \mathcal{B},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{C}\ :\quad ||f - P|| \leq \epsilon\ . \qquad \text{(ii)}$$

PARTIE II

Dans cette partie on utilise (ii) pour donner une caractérisation nécessaire des fonctions qui s'obtiennent comme limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions périodiques continues . Pour tout réel λ, toute fonction f de $\mathcal{B}$ et tout réel $T > 0$, on pose:

$$a(f, \lambda, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e_\lambda(-t)dt\ .$$

1-a Montrer que pour tout P de $\mathcal{C}$ et tout réel λ, $\lim_{T\to\infty} a(P, \lambda, T)$ existe.

1-b Montrer que pour tout réel λ et tout élément f de $\mathcal{B}$, $\lim_{T\to\infty} a(f, \lambda, T)$ existe. On note $a(f, \lambda)$ cette limite et on définit le *spectre de f*, noté $\mathrm{Spec}(f)$, par:

$$\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R}\ :\ a(f, \lambda) \neq 0\}\ .$$

1-c Soit P un élément de $\mathcal{C}$. Calculer explicitement $\mathrm{Spec}(P)$ et $a(P, \lambda)$ pour tout réel λ.

1-d Soit $(f_n;\ n \geq 1)$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge uniformément vers f. Montrer que pour tout réel λ:

$$\lim_{n\to\infty} a(f_n, \lambda) = a(f, \lambda)\ .$$

2 Soit f dans $\mathcal{B}$ et $P_k = \sum_{m=1}^{n_k} a_m^{(k)} e_{\ell_m^{(k)}}$, $k \geq 1$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $||f - P_k|| \leq 1/k$.

2-a Montrer que si λ n'est pas dans $\{\ell_m^{(k)};\ k \geq 1;\ n_k \geq m \geq 1\}$, alors $a(P_k, \lambda) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2-b Montrer que $\mathrm{Spec}(f)$ est au plus dénombrable.

3-a Soient r un réel non-nul et g un élément de $\mathcal{A}_r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Q_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(g) e_{2\pi k/r}$. Montrer que pour tout réel λ on a:

$$|a(Q_n, \lambda) - a(g, \lambda)| \leq \left(\sum_{|k|>n} |c_k(g)|^2 \right)^{1/2} .$$

3-b En déduire $\mathrm{Spec}(g)$ (une justification soigneuse est demandée).

4 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une suite $(f_p;\ p \geq 1)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ satisfaisant:

$$\lim_{p\to\infty} ||f - f_p|| = 0 .$$

4-a Montrer que les éléments de $\mathrm{Spec}(f)$ sont tous des multiples rationnels d'un même réel.

4-b On suppose que $\mathrm{Spec}(f)$ contient un élément non-nul. Il existe une suite $(r_p;\ p \geq 1)$ de réels non-nuls telle que $f_p \in \mathcal{A}_{r_p}$, pour tout $p \geq 1$. Montrer qu'il existe un certain rang p_0 tel que les périodes r_p , $p \geq p_0$ sont toutes des multiples rationnels d'un même réel.

4-c Donner un exemple simple de fonction presque périodique qui n'est pas limite uniforme de fonctions périodiques continues.

PARTIE III

Soit f un élément de $\mathcal{B}$. D'après II-2-b, $\mathrm{Spec}(f)$ est au plus dénombrable. Si $\mathrm{Spec}(f)$ est infini, on en fixe une énumération notée $(\lambda_n;\ n \geq 1)$ et on pose:

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a(f, \lambda_n)|^2 ,$$

(cette expression pouvant prendre éventuellement la valeur $+\infty$). Si $\mathrm{Spec}(f)$ est vide, on pose

$$\sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2 = 0 .$$

Si $\mathrm{Spec}(f)$ est fini, la somme $\sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2$ est définie sans ambiguité. Le but de cette partie est de généraliser la formule de Parseval aux fonctions presque périodiques. Plus précisément, on se propose de montrer le résultat suivant:

$$\forall f \in \mathcal{B} , \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt = \sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(f)} |a(f, \lambda)|^2 . \tag{iii}$$

1 Soit $f \in \mathcal{B}$. Justifier l'existence de

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt .$$

Montrer que tout élément de $\mathcal{A}$ satisfait (iii).

2-a Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, n réels distincts. On note $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ de $e_{\tau_1}, \ldots, e_{\tau_n}$. Soit $P = \sum_{k=1}^{n} b_k e_{\tau_k}$un élément de $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$. Montrer que $a(|f-P|^2, 0)$ est bien défini et que:

$$a(|f-P|^2,0) = a(|f|^2,0) - \sum_{k=1}^{n} |a(f,\tau_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k - a(f,\tau_k)|^2 .$$

En déduire que $\inf\{a(|f-P|^2,0);\ P \in \mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}\}$ est atteint en un unique élément de $\mathcal{C}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ à préciser.

2-b Montrer que:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} |a(f,\lambda)|^2 \leq a(|f|^2,0) .$$

2-c Soit $(P_k;\ k \geq 1)$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}$ considérée à la question II-2: d'après II-2-a et II-2-b, on sait que $\mathrm{Spec}(f)$ est inclus dans $\{\ell_m^{(k)};\ k \geq 1;\ n_k \geq m \geq 1\}$. En déduire que:

$$\forall k \geq 1\ ,\ \exists S_k \text{ fini } \subset \mathrm{Spec}(f)\ :\ \sum_{\lambda \in S_k} |a(f,\lambda)|^2 \geq a(|f|^2,0) - \frac{1}{k^2} .$$

En déduire l'assertion (iii).

3-a Soit f une fonction presque périodique à valeurs réelles positives. On suppose qu'elle est non-nulle. Il existe alors un réel x_0 et δ un réel strictement positif, tels que:

$$\inf_{y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[} f(y) = c > 0 .$$

On introduit un réel l tel que tout intervalle de longueur l contient au moins un élément de $E(f, c/2)$. On peut supposer sans restriction que $l \geq 2\delta$. Montrer que tout intervalle I de longueur supérieure à l contient un intervalle J de longueur δ tel que:

$$\inf_{y \in J} f(y) \geq c/2 .$$

3-b Déduire de la question précédente que $a(f,0) > 0$.

3-c Montrer que:

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{B}\ , \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ a(g_1,\lambda) = a(g_2,\lambda)) \Longrightarrow g_1 = g_2 .$$

3-d Soit f dans $\mathcal{B}$. Soit $(\lambda_n;\ n \geq 1)$ une énumération de $\mathrm{Spec}(f)$. On suppose que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(f,\lambda_n)| < \infty .$$

Prouver que pour tout réel t,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a(f,\lambda_n) e_{\lambda_n}(t) .$$