L'objet du problème est la recherche de lieux géométriques conduisant à l'étude de courbes planes (appelées en général cubiques circulaires). Les parties I et II donnent deux exemples de telles courbes. Dans la troisième partie, on considère le cas général.
Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine notée O, d'axes Ox et Oy et on désigne par a un nombre réel strictement positif donné.

PARTIE I

On désigne par D la droite d'équation $x = 2a$ et par C le cercle de centre $M_0(-2a, 0)$, de rayon $2a$.
Pour tout nombre réel θ, on désignera par :
* $H(\theta)$ le point d'intersection, lorsqu'il existe, de la droite d'angle polaire θ et de la droite D.
* $M(\theta)$ le point d'intersection de la droite d'angle polaire θ et du cercle C (avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(\theta)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

1) **Etude de la strophoïde droite**
   a) Donner une équation cartésienne, puis une équation polaire du cercle C.
   b) Déterminer des coordonnées polaires de $M(\theta)$ et $H(\theta)$, puis du milieu $I(\theta)$ du segment $[M(\theta), H(\theta)]$.
   En déduire, lorsque θ varie, que $I(\theta)$ décrit la courbe d'équation polaire :
$$r(\theta) = -a\frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}.$$
   c) Exprimer $r(\theta+2\pi)$, $r(\pi+\theta)$, $r(-\theta)$ en fonction de $r(\theta)$. Interpréter géométriquement ces résultats et indiquer sur quelle partie E de $\mathbb{R}$ il suffit d'étudier la courbe pour obtenir la totalité de son support.
   d) Déterminer la limite de $r(\theta)\sin(\theta - \pi/2)$ lorsque θ tend vers $\pi/2$. Qu'en déduit-on géométriquement ?
   e) Etudier le signe de $r(\theta)$ pour $\theta \in E$, représenter sur une même figure la droite D, le cercle C, et le support de cette courbe $\theta \mapsto I(\theta)$.
   f) Calculer l'aire de la boucle délimitée par la courbe $\theta \mapsto I(\theta)$.
   g) Donner enfin une équation cartésienne du support de la courbe $\theta \mapsto I(\theta)$.

PARTIE II

On désigne par D la droite d'équation $x = 2a$ et par C le cercle de centre $M_0(-a, 0)$, de rayon a.
Pour tout nombre réel t, on désignera par :
* $H(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et de la droite D.
* $M(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et du cercle C (avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(t)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

2) **Etude de la cissoïde droite**
   a) Donner une équation cartésienne du cercle C.
   b) Déterminer les coordonnées de $M(t)$ et $H(t)$, puis du milieu $J(t)$ du segment $[M(t), H(t)]$.
   c) Déterminer le vecteur-dérivé à la courbe $t \mapsto J(t)$, puis en déduire les points stationnaires (c'est-à-dire non réguliers) de celle-ci et calculer le second vecteur dérivé au point de paramètre $t = 0$.
   En déduire que la tangente à la courbe $t \mapsto J(t)$ au point $J(t_0)$ a pour équation $t_0(t_0^2+3)x-2y = at_0^3$.
   d) Dresser le tableau des variations des coordonnées $x(t)$, $y(t)$ du point $J(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, et représenter sur une même figure la droite D, le cercle C, et le support de cette courbe $t \mapsto J(t)$.
   e) Donner enfin une équation cartésienne du support de la courbe $t \mapsto J(t)$.

3) **Alignement de points sur la cissoïde droite**
   a) Montrer que trois points de coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont alignés si et seulement si :
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Factoriser le déterminant suivant où t_1, t_2, t_3 désignent trois nombres réels donnés :

$$D(t_1, t_2, t_3) = \begin{vmatrix} at_1^2 & at_1^3 & 1+t_1^2 \\ at_2^2 & at_2^3 & 1+t_2^2 \\ at_3^2 & at_3^3 & 1+t_3^2 \end{vmatrix}.$$

En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante portant sur t_1, t_2, t_3 trois points distincts de paramètres t_1, t_2, t_3 appartenant au support de la courbe $t \mapsto J(t)$ sont alignés.

c) La droite passant par $J(t_0)$ et $J(t_0 + \epsilon)$ recoupe le support de la courbe $t \mapsto J(t)$ en un point dont on note le paramètre $t(\epsilon)$. Exprimer $t(\epsilon)$ à l'aide de t_0 et ϵ et préciser la limite de $t(\epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0.

En déduire que la tangente en $J(t_0)$ à la courbe $t \mapsto J(t)$ recoupe le support de celle-ci en $J(-t_0/2)$, et que les tangentes en trois points alignés recoupent le support de la courbe en trois points alignés.

PARTIE III

On considère un point $M_0(x_0, y_0)$ distinct de O et on désigne alors par D la droite d'équation $x = 2a$ et par $C(x_0, y_0)$ le cercle de centre $M_0(x_0, y_0)$ passant par O. Pour tout nombre réel t, on désignera par :

* $H(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et de la droite D.
* $M(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et du cercle $C(x_0, y_0)$ (avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(t)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

4) **Etude générale des cubiques circulaires**

a) Déterminer les coordonnées de $M(t)$ et $H(t)$, puis du milieu $K(t)$ du segment $[M(t), H(t)]$.

b) Etudier les branches infinies de la courbe $t \mapsto K(t)$.

c) A quelle condition sur $M_0(x_0, y_0)$ l'origine O appartient-elle au support de la courbe $t \mapsto K(t)$? Représenter graphiquement la zone du plan correspondante.

d) A quelle condition sur $M_0(x_0, y_0)$ la courbe a-t-elle un point double ? Quel est alors ce point double ? Représenter graphiquement la zone du plan correspondante.

e) A quelle condition sur $M_0(x_0, y_0)$ la courbe a-t-elle un point stationnaire (c'est à dire non régulier) ? Quel est alors ce point stationnaire ? Représenter graphiquement la zone du plan correspondante.

5) **Alignement de points sur une cubique circulaire**

a) Montrer que trois points distincts de paramètres t_1, t_2, t_3 appartenant au support de la courbe $t \mapsto K(t)$ sont alignés si et seulement s'il existe un triplet $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ tels que t_1, t_2, t_3 vérifient :

$$avt_i^3 + (au + y_0 v + w)t_i^2 + (y_0 u + x_0 v + av)t_i + (x_0 u + au + w) = 0.$$

Vérifier que $avX^3 + (au + y_0 v + w)X^2 + (y_0 u + x_0 v + av)X + (x_0 u + au + w) = av(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3)$, puis montrer que les trois égalités précédentes sont équivalentes à une relation entre les nombres $\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $\sigma_2 = t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1$ et $\sigma_3 = t_1 t_2 t_3$ qu'on demande d'expliciter.

Retrouver ainsi le résultat obtenu dans le cas particulier de la cissoïde à la question II.3.

b) En déduire que la tangente en $K(t_0)$ à la courbe $t \mapsto K(t)$ recoupe le support de celle-ci en un point dont on précisera le paramètre en fonction de t_0.

***