Mines Ponts, 2002, MP, Première épreuve

(5 pages)

Première Partie

I-1. Fonction E :

a. Le développement en série entière de la fonction exponentielle donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k!\,n!} \right) \quad .$$

Or la série $\left(\sum \left| \frac{kx^n}{k!\,n!} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de somme $\frac{\mathrm{e}^{k|x|}}{k!}$ et $\left(\sum \frac{\mathrm{e}^{k|x|}}{k!} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente (de somme $E(|x|)$), donc la famille $\left(\frac{(kx)^n}{k!\,n!} \right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et on peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k!\,n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right)$$

donc $\underline{E \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R}}$.

b. On sait que si f est développable en série entière en 0, les coefficients du développement sont $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, donc, ici, on a $\underline{A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}}$.

c. $\diamond$ On a $\forall x \in \mathbb{R},\ E'(x) = \mathrm{e}^x\, E(x)$ donc la formule de Leibniz donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ E^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, \mathrm{e}^x\, E^{(k)}(x)$ donc, en prenant $x = 0$, $\underline{A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, A_k}$.

$\diamond$ On a $A_0 = E(0) = \mathrm{e} = \mathrm{e}\, B_0$ et donc, par récurrence immédiate à l'aide de la relation ci-dessus et de la relation similaire sur B_n, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \mathrm{e}\, B_n$ donc $\underline{B_n = \frac{1}{\mathrm{e}}\, A_n}$.

I-2. Comparaison de sommes infinies :

a. On a $0 \leqslant u_p\, p^n \leqslant U_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k\, k^n$ et $0 \leqslant U_n - R_{p,n} = \sum_{k=1}^{p-1} u_k\, k^n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_{p-1}\,(p-1)^n = o\big(u_p\, p^n\big)$ donc $U_n - R_{p,n} = o\big(U_n\big)$ et donc $\underline{U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} R_{p,n}}$.

b. Puisque $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant p,\ \big|u_k - v_k\big| \leqslant \varepsilon\, u_k$. Un tel p étant fixé, posons $R_{p,n}(u) = \sum_{k=p}^{+\infty} u_k\, k^n$ et $R_{p,n}(v) = \sum_{k=p}^{+\infty} v_k\, k^n$. On a $\big|R_{p,n}(u) - R_{p,n}(v)\big| = \left| \sum_{k=p}^{+\infty} (u_k - v_k)\, k^n \right| \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty} \big|u_k - v_k\big|\, k^n$ car les deux séries sont absolument convergentes donc leur différence aussi. On obtient donc $\big|R_{p,n}(u) - R_{p,n}(v)\big| \leqslant \varepsilon \sum_{k=p}^{+\infty} u_k\, k^n = \varepsilon\, R_{p,n}(u) \leqslant \varepsilon\, U_n$. D'autre part, la question précédente donne

$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_{p,n}(u)$ et $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_{p,n}(v)$ donc il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \left|R_{p,n}(u) - U_n\right| \leqslant \varepsilon\, U_n$ et $\left|R_{p,n}(v) - V_n\right| \leqslant \varepsilon\, V_n$.
Donc $\forall n \geqslant n_0,\ \left|U_n - V_n\right| \leqslant \left|U_n - R_{p,n}(u)\right| + \left|R_{p,n}(u) - R_{p,n}(v)\right| + \left|R_{p,n}(v) - V_n\right| \leqslant 2\varepsilon\, U_n + \varepsilon\, V_n$.
On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$. On a alors, en tenant compte de l'inégalité précédente avec $\varepsilon < \frac{1}{2}$:
$\forall n \geqslant n_0,\ V_n \leqslant \left|V_n - U_n\right| + U_n \leqslant 2U_n + \frac{V_n}{2}$ donc $V_n \leqslant 4\, U_n$
$\forall n \geqslant n_0,\ \left|U_n - V_n\right| \leqslant 6\varepsilon\, U_n$
Donc $\forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[\quad \exists n_0 \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \left|U_n - V_n\right| \leqslant 4\varepsilon\, U_n$.
Donc, finalement, $\underline{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n}$.

I-3. Fonction f_n :

a. On a $s_k = \mathrm{e}^k\, k^{-k+n-1/2} = \exp\left[-k\ln k + k + (n - \frac{1}{2})\ln k\right]$ donc $k^2\, s_k = \exp\left[-k\ln k + k + (n+\frac{3}{2})\ln k\right] \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc, par comparaison aux séries de Riemann, $\underline{\text{la série } \left(\sum s_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$.

b. L'équivalent de Stirling donne $\dfrac{k^n}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k^n\, k^{-k}\mathrm{e}^k}{\sqrt{2\pi k}} = \dfrac{\mathrm{e}^k k^{-k+n-1/2}}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{s_k}{\sqrt{2\pi}}$ et,pour $k \geqslant 1$, $s_k > 0$ et $s_0 = 0$, donc, d'après la question [**2.b**], on a $\underline{A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k)}$.

Deuxième Partie

II-1. Étude de la fonction Φ_λ :

a. On a $\underline{\Phi_\lambda(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \lambda \ln x \quad \text{et} \quad \Phi_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln x}$.

b. $\Phi'_\lambda(x) = -\ln x + \dfrac{\lambda}{x}$ et $\Phi''_\lambda(x) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{\lambda}{x^2} < 0$ donc Φ'_λ est une fonction continue strictement décroissante de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ (car $\lim_{x\to0^+} Phi'_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} Phi'_\lambda(x) = -\infty$) et donc il existe un unique $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Phi'_\lambda(\mu) = 0$ d'où le tableau de variations :

x	0		μ		$+\infty$
$\Phi_\lambda(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\Phi_\lambda(\mu)$	$\searrow$	$-\infty$

c. $\Phi'_\lambda(\mu) = -\ln\mu + \dfrac{\lambda}{\mu} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu\ln\mu$ et , puisque $\lambda > 0$, on a $\mu > 1$. Posons $\phi(x) = x\ln x$: ϕ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et $\phi'(x) = 1 + \ln x > 0$. Donc ϕ est un C^∞ difféomorphisme de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et donc $\underline{\varphi = \phi^{-1} \text{ est } C^\infty \text{ sur }]0, +\infty[}$.

Remarque: la relation admise est facile à démontrer et elle est vraie non seulement pour $x > 0$ mais pour $x > -1$ ce qui sert dans la question [**III.1.c**].

II-2. Maximum de la fonction f_n :

a. $\diamond$ Pour $x > 0$, on a $f_n(x) = \exp\left[x - x\ln x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln x\right] = \exp\left[\Phi_{n-1/2}(x)\right]$ donc f_n admet un maximum sur $]0, +\infty[$ en un unique point $\mu_n = \varphi\left(n - \frac{1}{2}\right)$ De plus, $\forall x \leqslant 0$, $f_n(\mu_n) > 0 = f_n(x)$ donc $f_n(\mu_n)$ est le maximum de f_n sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\underline{f_n \text{ admet un unique maximum sur } \mathbb{R} \text{ atteint en } \mu_n = \varphi\left(n - \frac{1}{2}\right)}$.

$\diamond$ f_n est C^1 sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, $f_n(0^-)=0$ et $f_n(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\exp\Big[\Phi_{n-1/2}(x)\Big]=0$, $f_n'(0^-)=0$ et, pour $x>0$, $f_n'(x)=\left[-\ln x+\dfrac{n-1/2}{x}\right]\exp\Big[\Phi_{n-1/2}(x)\Big]=\exp\left[x-x\ln x+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln x+\ln|\ln x|\right]+\left(n-\frac{1}{2}\right)\exp\left[x-x\ln x+\left(n-\frac{3}{2}\right)\ln x\right]\xrightarrow[x\to 0^+]{}\begin{cases}0+0 & \text{si } n\geqslant 2\\ 0+(+\infty) & \text{si } n=1\end{cases}$ donc $\underline{\Big(f_n\ C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\Big)\Leftrightarrow\Big(n\geqslant 2\Big)}$.

b. $\diamond$ On a déjà vu au [**1.c**] que $\forall\lambda>0,\ \mu=\varphi(\lambda)>1$. De plus, avec $\phi=\varphi^{-1}$, on a $\phi(\mu_1)=\frac{1}{2}<\phi(2)=2\ln 2<\phi(\mu_2)=\frac{3}{2}$ donc la croissance de φ vue au [**1.c**] donne $\underline{1<\mu_1<2<\mu_2}$.

$\diamond$ De même, pour $n\geqslant 3$, $\phi(n)=n\ln n\geqslant n\ln 3>n>n-\dfrac{1}{2}$ donc $n>\mu_n$. D'autre part, par concavité de ln, on a $\forall t>0, \ln t\leqslant t-1$ et donc $\phi\big(\sqrt{n}\big)=\sqrt{n}\ln\sqrt{n}\leqslant\sqrt{n}\big(\sqrt{n}-1\big)=n-\sqrt{n}\leqslant n-\sqrt{3}<n-\dfrac{1}{2}$. Donc $\underline{\forall n\geqslant 3,\ \sqrt{n}<\mu_n<n}$.

$\diamond$ Ainsi, $\dfrac{\mu_n}{n}=\dfrac{n-\frac{1}{2}}{n\ln\mu_n}\leqslant\dfrac{1}{\ln\sqrt{n}}$ d'après ci-dessus donc $\underline{\mu_n=o(n) \text{ pour } n\to+\infty}$.

$\diamond$ De même, $\dfrac{\mu_n}{n^\alpha}\geqslant\dfrac{n-\frac{1}{2}}{n^\alpha\ln n}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{n^{1-\alpha}}{\ln n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ car $1-\alpha>0$. Donc $\underline{\forall\alpha\in]0,1[,\ n^\alpha=o(\mu_n) \text{ pour } n\to+\infty}$.

Remarque: $\mu_n\ln\mu_n=n-\frac{1}{2}$ donne $\ln\mu_n+\ln\big(\ln\mu_n\big)=\ln\big(n-\frac{1}{2}\big)$ donc, puisque $\mu_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, $\ln\mu_n\underset{+\infty}{\sim}\ln\big(n-\frac{1}{2}\big)\underset{+\infty}{\sim}\ln n$ donc $\mu_n=\dfrac{n-\frac{1}{2}}{\ln\mu_n}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{n-\frac{1}{2}}{\ln n}$ soit $\underline{\mu_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n}{\ln n}}$.

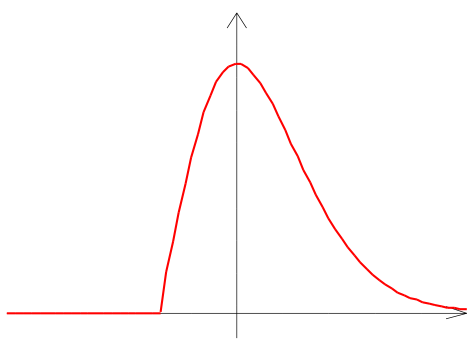
Troisième Partie

III-1. Propriétés de la fonction g_n :

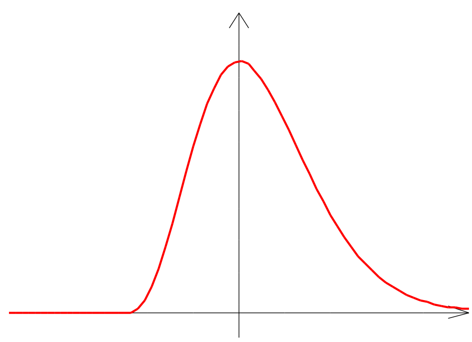
a. $y=\mu_n\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt{n}\left(\dfrac{y}{\mu_n}-1\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\mu_n}y-\sqrt{n}$ donc $\underline{\forall y\in\mathbb{R},\ f_n(y)=f_n(\mu_n)\,g_n\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\mu_n}y-\sqrt{n}\right)}$.

b. $x\longmapsto\mu_n\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$ étant croissante et prenant la valeur 0 en $-\sqrt{n}$ et la valeur μ_n en 0, le graphe de g_n découle de celui de f_n qui est donné par les résultats de [**II.2.a**].

$\underline{n=1}$



$\underline{n\geqslant 2}$



c. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé: $\exists N,\ \forall n \geqslant N,\quad -\sqrt{n} < x$ et donc on a, pour $n \geqslant N$, en posant $\lambda = n - \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{1}{f_n(\mu_n)} \exp\left[\Phi_{\lambda_n}\left(\mu_n\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{f_n(\mu_n)} \exp\left[\Phi_{\lambda_n}(\mu_n) + (\mu_n - \lambda_n)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \exp\left[\left(\mu_n - n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{x^2}{2} + o(1)\right] \qquad \text{car } \frac{\mu_n}{n} = 0(1) \end{aligned}$$

donc $\underline{g_n \xrightarrow{S} g \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]}$.

d. $\forall x > -\sqrt{n},\ g_n(x) = \exp\left[(\mu_n - \lambda_n)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) - \mu_n \frac{x}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]$

$$\leqslant \exp\left[\left(\mu_n - n + \tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]$$

car $\frac{x}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0$ pour x positif ou négatif. De plus, $\mu_n - n + \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} -n$ donc il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \mu_n - n + \frac{1}{2} \leqslant -\frac{n}{2}$ et $\forall t > -1,\ t \geqslant \ln(1+t)$ donc

$$\underline{\exists\, n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x > -\sqrt{n},\quad g_n(x) \leqslant \exp\left[-\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]}\ .$$

III-2. Une majoration de la fonction g_n :

a. $\diamond$ u est C^∞ sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$ et, d'autre part, $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ u(x) = -\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+2}$ donc u se prolonge en 0 en une fonction développable en série entière en 0 qui est donc C^∞ sur $]-1,1[$ donc $\underline{u \text{ se prolonge en une fonction } C^\infty \text{ sur }]-1,+\infty[}$.

$\diamond$ Pour $x \neq 0$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} ln(1+x) - \frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{v(x)}{x^3}$ avec $v(x) = 2ln(1+x) - x - \frac{x}{1+x}$ et donc $v'(x) = \frac{2}{1+x} - 1 - \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{x^2}{(1+x)^2}$. Donc v est décroissante sur $]-1,+\infty[$. Or $v(0) = 0$ donc $v(x)$ est du signe de $-x$ et donc $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\},\ u'(x) < 0$ Donc $\underline{u \text{ décroît sur }]-1,+\infty[}$.

$\diamond$ $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\underline{\forall x \in]-1,+\infty[,\ u(x) > 0}$.

b. L'inégalité du [**1.d**] s'écrit $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x > -\sqrt{n},\quad g_n(x) \leqslant \exp\left[-\frac{x^2}{2} u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]$.

Si $x \in]-\sqrt{n}, 0]$, [**a**] donne $u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geqslant u(0) = \frac{1}{2}$ donc $g_n(x) \leqslant \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]$ et cette inégalité est encore valable pour $x \leqslant -\sqrt{n}$ puisqu'alors $g_n(x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$, de même, $u\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \geqslant u(x)$ d'où $g_n(x) \leqslant \exp\left[-\frac{x^2}{2} u(x)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \ln(1+x)\right)\right]$.

Donc $\underline{\forall n \geqslant n_0,\quad \forall x \leqslant 0,\quad g_n(x) \leqslant \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] \quad ; \quad \forall x \geqslant 0,\quad g_n(x) \leqslant \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \ln(1+x)\right)\right]}$.

Quatrième Partie

IV-1. Intégrabilité de la fonction g_n :

$\diamond$ g_n est continue sur $\mathbb{R}$, g_n est nulle donc intégrable sur $]-\infty,-\sqrt{n}]$ et, pour $x \geqslant 0$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x-\ln(1+x)\right)\right]$ avec $\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x-\ln(1+x)\right)\right] = \sqrt{1+x}\,\mathrm{e}^{-x/2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$.
Donc $\underline{g_n \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

$\diamond$ Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right] & \text{si } x<0 \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x-\ln(1+x)\right)\right] & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$. h est intégrable sur $\mathbb{R}$ car h est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour $x \to \pm\infty$, on a $h(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'après [**III.2.b**], on a $\forall n \geqslant n_0,\ |g_n| \leqslant h$. De plus, $g_n \xrightarrow{S} g$ continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ donc le théorème de convergence dominée s'applique et donc $\underline{I_n = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}}$.

IV-2. Un encadrement de la somme S_n :

f_n croît sur $[-1,p]$ donc $\forall k \in [\![0,p]\!]$, $\int_{k-1}^{k} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_n(k)$ et $\forall k \in [\![0,p-1]\!]$, $f_n(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\int_0^p f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{p} f_n(k) \leqslant f_n(p) + \int_0^p f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Et f_n est décroît sur $[p+1,+\infty[$ donc $\forall k \geqslant p+1$, $\int_{k1}^{k+1} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_n(k)$ et $\forall k \geqslant p+2$, $f_n(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ donc, puisque $\left(\sum f_n(k)\right)_{k\geqslant p+1}$ converge, f_n est intégrable sur $[p+1,+\infty[$ et $\int_{p+1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} f_n(k) \leqslant f_n(p+1) + \int_{p+1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On a donc $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_p^{p+1} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t + f_n(p) + f_n(p+1) - \int_p^{p+1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui donne, en posant $I'_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\Delta_n = f_n(p) + f_n(p+1) + \int_p^{p+1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$, $I'_n - \Delta_n \leqslant S_n \leqslant I'_n + \Delta_n$ puisque $f_n \geqslant 0$.

Mais, selon [**III.1.a**], $I'_n = f_n(\mu_n) \int_0^{+\infty} g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n} t - \sqrt{n}\right)\,\mathrm{d}t = f_n(\mu_n)\,\frac{\mu_n}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = I_n$ en posant $x = \frac{\sqrt{n}}{\mu_n} t - \sqrt{n}$.

De plus $\Delta_n = f_n(\mu_n)\,\frac{\mu_n}{\sqrt{n}}\,\epsilon_n$ avec $0 \leqslant \epsilon_n = \frac{\sqrt{n}}{f_n(\mu_n)\,\mu_n}\,\Delta_n \leqslant \frac{\sqrt{n}}{f_n(\mu_n)\,\mu_n}\,3 f_n(\mu_n)$ puisque $f_n(\mu_n)$ est le maximum de f_n. Donc $0 \leqslant \epsilon_n \leqslant \frac{3\sqrt{n}}{\mu_n} = o(1)$ d'après [**II.2.b.iii**].

Donc $\underline{\exists\, K_n = \frac{f_n(\mu_n)\,\mu_n}{\sqrt{n}},\ \exists\, \epsilon_n \geqslant 0,\ \text{ tels que } K_n\left(I_n - \epsilon_n\right) \leqslant S_n \leqslant K_n\left(I_n + \epsilon_n\right) \text{ et } \epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

IV-3. Un équivalent du réel B_n :

On a $B_n = \mathrm{e}^{-1} A_n$ d'après [**I.1.c**] et $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_n$ d'après [**I.3.b**]. De plus, on peut écrire l'inégalité du [**2**] sous la forme $I_n - \epsilon_n \leqslant \frac{S_n}{K_n} \leqslant I_n + \epsilon_n$ car $K_n > 0$ et, comme, selon [**1**] et [**2**], $\lim_{n\to+\infty} I_n - \epsilon_n = \lim_{n\to+\infty} I_n + \epsilon_n = \sqrt{2\pi}$, on en déduit $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,K_n$. Donc $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1} K_n$. Enfin, $K_n = \frac{f_n(\mu_n)\,\mu_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left[\mu_n - \mu_n \ln(\mu_n) + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(\mu_n) + \ln(\mu_n)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left[\mu_n - \left(n - \frac{1}{2}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(\mu_n)\right]$.

Donc $\underline{B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{\mu_n} \left(\frac{\mu_n}{\mathrm{e}}\right)^{n+1/2}}$.

* * *
* *
*