Mines-Ponts Maths 1 MP

Première Partie

1. **Fonction E**

   (a) Pour tout réel y, $e^y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, donc

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k!\,n!} \right).$$

   Posons $u_{k,n} = \dfrac{k^n\,x^n}{k!\,n!}$. La série $\left(\sum |u_{k,n}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de somme $\frac{e^{k|x|}}{k!}$ et $\left(\sum \frac{e^{k|x|}}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente (de somme $E(|x|)$), donc la famille $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et le théorème de Fubini permet d'intervertir l'ordre des sommations, soit :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k!\,n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right).$$

   Ainsi E est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

   (b) Etant développable, E est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout n, le coefficient de degré n de la série entière vaut $\dfrac{E^{(n)}(0)}{n!}$, i.e $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ E'(x) = e^x\,E(x)$ d'où par la formule de Leibniz:

   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ E^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, e^x\, E^{(k)}(x)$ soit en prenant $x = 0$: $\underline{A_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, A_k}$.

   $A_0 = E(0) = e = e\,B_0$. Les suites $\left(\dfrac{A_n}{e}\right)$ et (B_n) coïncident pour $n = 0$ et vérifient la même relation de récurrence, ce qui entraine par récurrence immédiate que $\underline{B_n = \frac{1}{e}\,A_n}$.

2. **Comparaison de sommes infinies:**

   (a) p est ici fixé. $R_{p,n} \geq u_p.p^n$ par positivité des u_k.

   $$0 \leq \frac{U_n - R_{p,n}}{R_{p,n}} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n}{R_{p,n}} \leq \sum_{k=1}^{p-1} \frac{u_k}{u_p} \left(\frac{k}{p}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

   car la somme comporte $p-1$ termes dont chacun a pour limite 0.

   Ainsi, $\underline{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_{p,n}}$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. $u_n \sim v_n$, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq p,\ \left|u_k - v_k\right| \leq \varepsilon\, v_k$.

   Un tel p étant fixé, posons $R_{p,n}(u) = \sum_{k=p}^{+\infty} u_k\, k^n$ et $R_{p,n}(v) = \sum_{k=p}^{+\infty} v_k\, k^n$. On a

   $\left|R_{p,n}(u) - R_{p,n}(v)\right| = \left|\sum_{k=p}^{+\infty} (u_k - v_k)\, k^n\right| \leq \sum_{k=p}^{+\infty} \left|u_k - v_k\right| k^n \leq \varepsilon\ \sum_{k=p}^{+\infty} v_k\, k^n = \varepsilon\, R_{p,n}(v) \leq \varepsilon\, V_n$.

   Par la question précédente, $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_{p,n}(u)$ et $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_{p,n}(v)$, donc il existe n_0 tel que

   $\forall n \geq n_0,\ \left|R_{p,n}(u) - U_n\right| \leq \varepsilon\, U_n$ et $\left|R_{p,n}(v) - V_n\right| \leq \varepsilon\, V_n$, ce qui implique

   $\forall n \geq n_0,\ \left|U_n - V_n\right| \leq \left|U_n - R_{p,n}(u)\right| + \left|R_{p,n}(u) - R_{p,n}(v)\right| + \left|R_{p,n}(v) - V_n\right| \leq \varepsilon U_n + 2\varepsilon V_n$.

   D'où $\frac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon} V_n \leq U_n \leq \frac{1+2\varepsilon}{1-\varepsilon} V_n$, d'où $\dfrac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, i.e $\underline{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n}$.

Remarque: On pouvait raccourcir la rédaction en traitant les questions a et b simultanément.

3. **Fonction f_n:**

   (a) $s_k \geq 0$ et $\ln(k^2 s_k) = k + (-k+n+\frac{3}{2})\ln k \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty$ donc $s_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et la série à termes positifs $(\sum s_k)$ converge.

   (b) On pose $u_k = e^k k^{-k-1/2}$ et $v_k = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{k!}$. Par la formule de Stirling, $u_k \underset{k\to\infty}{\sim} v_k$. Les séries à termes positifs $\left(\sum u_k k^n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum v_k k^n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent donc d'après 2b, $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{k!}$, d'où $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty} f_n(k)$.

Deuxième Partie

1. **Étude de la fonction Φ_λ :**

   (a) $\Phi_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \lambda\ln x \quad , \quad \Phi_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln x$.

   (b) Φ_λ est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$. $\Phi'_\lambda(x) = -\ln x + \frac{\lambda}{x}$, fonction strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (car $\lim_{x\to0^+}\Phi'_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\Phi'_\lambda(x) = -\infty$) et donc il existe un unique $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Phi'_\lambda(\mu) = 0$ d'où le tableau de variations :

x	0	μ	$+\infty$
$\Phi_\lambda(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$\Phi_\lambda(\mu)$	$\searrow$ $-\infty$

   (c) $\mu = \varphi(\lambda)$ est l'unique solution de l'équation $x\ln x = \lambda$.
   La fonction $\psi : x \mapsto x\ln x$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, à dérivée strictement positive donc est un C^1 difféomorphisme de $]1,+\infty[$ sur son image $]0,+\infty[$.
   $\varphi = \psi^{-1}$ est donc de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
   Preuve de la relation admise:
   On forme la différence $\Delta = \Phi_\lambda(\mu(1+x)) - \Phi_\lambda(\mu) - (\mu-\lambda)(x-\ln(1+x)) + \mu x\ln(1+x)$.
   $\Delta = -\mu(1+x)\ln\mu - \mu(1+x)\ln(1+x) + \mu(1+x) + \lambda\ln\mu + \lambda\ln(1+x) + \mu\ln\mu - \mu - \lambda\ln\mu - \mu x + \mu\ln(1+x) + \lambda x - \lambda\ln(1+x) + \mu x\ln(1+x) = -\mu x\ln\mu + \lambda x = 0$ car $\lambda = \mu\ln\mu$.
   A noter que cette égalité est vraie non seulement pour $x > 0$ mais pour $x > -1$, ce qui sert dans la question III.1.c.

2. **Maximum de la fonction f_n:**

   (a) Pour $x > 0$, $f_n(x) = \exp[\Phi_{n-\frac{1}{2}}(x)]$ donc f_n admet un maximum sur $]0,+\infty[$ en un unique point $\mu_n = \varphi\big(n-\frac{1}{2}\big)$. f_n étant nulle sur $]-\infty,0[$, $f_n(\mu_n)$ est le maximum de f_n sur $\mathbb{R}$.
   f_n est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, $f_n(x) \underset{x\to0_+}{\sim} x^{n-\frac{1}{2}}$ donc $f'_n(x) \underset{x\to0_+}{\sim} (n-\frac{1}{2})x^{n-\frac{3}{2}}$
   Si $n = 1$, f_n n'est pas dérivable à droite en 0.
   Si $n \geq 2$, les dérivées à gauche et à droite en 0 sont nulles, donc f_n est C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) i. Φ'_λ est strictement décroissante et $\mu_n = {\Phi'}_{n-\frac{1}{2}}^{-1}(0)$.
   $\Phi'_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{2} > 0$ et $\Phi'_{\frac{1}{2}}(2) = -\ln 2 + \frac{1}{4} < 0$ donc $1 < \mu_1 < 2$.
   $\Phi'_{\frac{3}{2}}(2) = -\ln 2 + \frac{3}{4} > 0$ donc $2 < \mu_2$.
   Pour $n \geq 3$, $\quad \Phi'_{n-\frac{1}{2}}(n) = -\ln n + \dfrac{n-\frac{1}{2}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2n} - \ln n < 0$ et
   $\Phi'_{n-\frac{1}{2}}(\sqrt{n}) = \sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \ln\sqrt{n} > 0 \quad$ (car la fonction $\alpha : x \mapsto x - \frac{1}{2x} - \ln x$ est croissante sur $[1,+\infty[$ et $\alpha(1) > 0$ donc $\alpha(\sqrt{n}) > 0$) donc $\sqrt{n} < \mu_n < n$.

   ii. $\mu_n\ln\mu_n = n - \frac{1}{2}$ et $\ln\mu_n > \ln\sqrt{n}$ donc $\frac{\mu_n}{n} \leq \frac{1}{\ln\sqrt{n}}$ donc $\mu_n = o(n)$.

   iii. Pour $\alpha \in]0,1[$, $\dfrac{n^\alpha}{\mu_n} = \dfrac{n^\alpha}{n-\frac{1}{2}}\ln\mu_n < \dfrac{n^\alpha}{n-\frac{1}{2}}\ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad$ donc $n^\alpha = o(\mu_n)$.

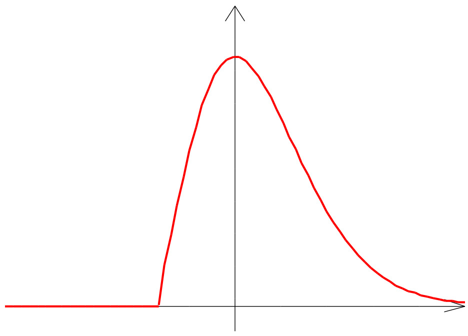
Troisième Partie

1. **Propriétés de la fonction g_n:**

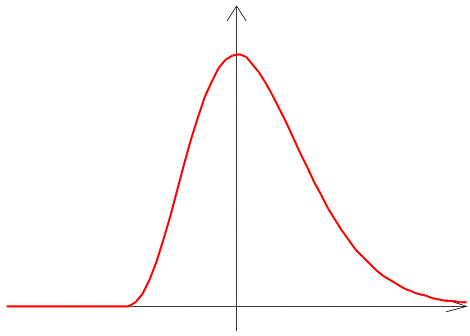
   (a) $g_n(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}x-\sqrt{n})=\frac{1}{f_n(\mu_n)}f_n\left(\mu_n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}x-\sqrt{n})\right)\right)=\frac{f_n(x)}{f_n(\mu_n)}$.

   (b) D'après 2a, le graphe de f est de la forme

   $\mu_n, n=1$

   $\mu_n, n\geq 2$

   Pour avoir l'allure du graphe de g_n, il suffit de pratiquer des homothéties sur les axes de coordonnées.
   $g_n=0$ sur $]-\infty,-\sqrt{n}]$, $\quad \sup_{[-\sqrt{n},+\infty[} g_n=g_n(0)=1$.

   (c) Soit x un réel, et n_1 un entier tel que $x>-\sqrt{n_1}$.
   $\forall n\geq n_1,\ \ln g_n(x)=\ln f_n\left(\mu_n(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)-\ln f_n(\mu_n)=\Phi_{n-\frac{1}{2}}\left(\mu_n(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)-\Phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n)$.
   D'après l'égalité admise au II.1,
   $(*)\ln g_n(x)=\left(\mu_n-(n-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)-\mu_n\frac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})=\left(\mu_n-(n-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{x^2}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)-\mu_n\frac{x^2}{n}$.
   Or $\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ donc $\ln g_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\frac{x^2}{2}$ et par continuité de l'exponentielle, (g_n) converge simplement vers la fonction g définie par $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   (d) $\diamond\quad \forall t>-1,\ \ln(1+t)\leq t$ donc $\frac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\geq 0$
   $\diamond\quad \mu_n=o(n)$ donc $\exists n_0,\ \forall n\geq n_0,\ \mu_n-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\leq 0$
   $\diamond\quad \forall t>-1,\ t\ln(1+t)\geq 0$ donc $\mu_n\frac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\geq 0$
   Il en résulte que $\forall x>-\sqrt{n},\ \forall n\geq n_0,\ (\mu_n-\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)-\mu_n\frac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\leq 0$
   soit $\left(\mu_n-(n-\frac{1}{2})\right)\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)-\mu_n\frac{x}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\leq -\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)$
   D'après (*), on en déduit : $\underline{g_n(x)\leq \exp\left(-\frac{n}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})\right)\right)}$.

2. **Une majoration de la fonction g_n:**

   (a) u est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ et $u'(x)=\frac{2(1+x)\ln(1+x)-2x-x^2}{x^3(1+x)}$.
   Soit $N(x)$ le numérateur. Un développement limité en 0 donne $N(x)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^3}{3}$ donc $u'(x)\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{1}{3}$.
   De plus $u(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{2}$, donc en posant $u(0)=\frac{1}{2}$ et en utilisant le théorème de dérivation d'un prolongement, le prolongement obtenu est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.
   $N'(x)=2(\ln(1+x)-x)\leq 0$ et $N(0)=0$ donc $u'\leq 0$ et u décroit sur $]-1,+\infty[$. $u(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc u est positive.

   (b) Pour $x\leq -\sqrt{n},\ g_n(x)=0\leq \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$. D'après 1d, $g_n(x)\leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}u(\frac{x}{\sqrt{n}})\right)$.
   Pour $-\sqrt{n}\leq x\leq 0$, u décroit donc $u(\frac{x}{\sqrt{n}})\geq u(0)=\frac{1}{2}$, soit $g_n(x)\leq \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$.
   Pour $x\geq 0,\ \frac{x}{\sqrt{n}}\leq x$, donc $u(\frac{x}{\sqrt{n}})\geq u(x)$ donc $g_n(x)\leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}u(x)\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\ln(1+x))\right)$.

Quatrième Partie

1. **Intégrabilité de la fonction g_n:**

   g_n est continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,-\sqrt{n}[$ donc est intégrable sur $\mathbb{R}_-$. De plus, $x^2 g_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Pour $n \geq n_0$, $\quad x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq g_n(x) \leq e^{-\frac{x^2}{4}}$ qui est intégrable sur $]-\infty, 0]$.

   $x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x-\ln(1+x))\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ qui est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

   La suite de fonctions positives (g_n) converge simplement vers g et est majorée sur $\mathbb{R}$ par une fonction intégrable indépendante de n, donc par le théorème de convergence dominée, $\underline{I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}}$.

2. **Un encadrement de la somme S_n:**

   f_n croît sur $[-1,p]$ donc $\forall k \in [0,p]$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f_n(t)\,dt \leq f_n(k)$ et $\forall k \in [0,p-1]$, $\displaystyle f_n(k) \leq \int_{k}^{k+1} f_n(t)\,dt$

   donc $\displaystyle\int_0^p f_n(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{p} f_n(k) \leq f_n(p) + \int_0^p f_n(t)\,dt.$

   f_n décroît sur $[p+1,+\infty[$ donc $\forall k \geq p+1$, $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f_n(t)\,dt \leq f_n(k)$ et $\forall k \geq p+2$, $\displaystyle f_n(k) \leq \int_{k-1}^{k} f_n(t)\,dt$

   donc $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} f_n(t)\,dt \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} f_n(k) \leq f_n(p+1) + \int_{p+1}^{+\infty} f_n(t)\,dt.$

   En sommant, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt - \int_p^{p+1} f_n(t)\,dt \leq S_n \leq \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt + f_n(p) + f_n(p+1) - \int_p^{p+1} f_n(t)\,dt$

   d'où, en posant $\displaystyle I_n' = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\displaystyle\Delta_n = f_n(p) + f_n(p+1) + \int_p^{p+1} f_n(t)\,dt$, on obtient

   $$I_n' - \Delta_n \leq S_n \leq I_n' + \Delta_n$$

   D'après III.1.a, $\displaystyle I_n' = f_n(\mu_n) \int_0^{+\infty} g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n} t - \sqrt{n}\right) dt = f_n(\mu_n)\, \frac{\mu_n}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} g_n(x)\,dx$

   d'où $I_n' = K_n\, I_n$ en posant $K_n = \dfrac{\mu_n\, f_n(\mu_n)}{\sqrt{n}}$.

   $f_n(\mu_n)$ étant le maximum de la fonction f_n, on a $\Delta_n \leq 3 f_n(\mu_n)$. On pose $\varepsilon_n = \dfrac{\Delta_n}{K_n}$ de sorte que $0 \leq \varepsilon_n \leq \dfrac{3\sqrt{n}}{\mu_n}$, et d'après II.2.b.iii, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   Finalement, $\underline{K_n(I_n - \varepsilon_n) \leq S_n \leq K_n(I_n + \varepsilon_n)}$.

3. **Un équivalent du réel B_n:**

   D'après la question précédente, $\dfrac{S_n}{K_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2\pi}$. La partie I nous apprend que $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{S_n}{\sqrt{2\pi}}$ et $B_n = \dfrac{A_n}{e}$, donc $B_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{K_n}{e}$.

   Finalement, $\underline{B_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\mu_n\, f_n(\mu_n)}{e\sqrt{n}}}$.