

*Les calculatrices sont autorisées*

\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*

On désigne par  $\mathbf{N}$  l'ensemble des entiers naturels, par  $\mathbf{N}^*$  l'ensemble  $\mathbf{N}$  privé de 0, par  $\mathbf{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs, par  $\mathbf{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels et par  $\mathbf{R}$  l'ensemble des nombres réels.

Etant donné un entier naturel  $n$ , on note  $\llbracket 0, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $0 \leq k \leq n$ .

Cette épreuve comporte trois parties.

Dans la première partie, on étudie les solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Dans la deuxième partie, qui est indépendante de la première partie, on étudie des suites numériques définies par des relations de récurrence.

La troisième partie utilise les résultats des parties précédentes pour obtenir un encadrement de  $\frac{1}{th(1)}$  par des nombres rationnels ( $th$  désignant la fonction tangente hyperbolique).

## PARTIE I

Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on considère les équations différentielles  $(E_n)$   $x^2 y'' + (n - n^2 - x^2)y = 0$ , où  $x$  désigne une variable réelle et  $y = y(x)$  une fonction deux fois dérivable.

On remarque que  $(E_0)$  et  $(E_1)$  sont les mêmes équations.

**I.1.** On prend  $n = 0$  et on étudie l'équation différentielle  $(E_0)$ .

**I.1.1.** Déterminer les solutions de  $(E_0)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$ ,  $]0, +\infty[$ .

**I.1.2.** L'équation  $(E_0)$  a-t-elle des solutions sur  $\mathbf{R}$  ?

**I.2.** On prend  $n \geq 2$  et on suppose que l'équation différentielle  $(E_n)$  a une solution développable en

série entière  $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$ , de rayon de convergence  $R > 0$ .

**I.2.1.** Calculer  $u_0$  et  $u_1$ .

**I.2.2.** Pour  $k \geq 2$ , donner une relation entre  $u_k$  et  $u_{k-2}$ .

**I.2.3.** Calculer les coefficients  $u_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

**I.2.4.** Pour  $p \in \mathbf{N}$ , calculer les coefficients  $u_{n+2p+1}$ .

**I.2.5.** Peut-on calculer  $u_n$  ? On justifiera la réponse.

**I.2.6.** Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière.

Pour  $k$  et  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on note  $C_{k,n} = \frac{2^n (k+n)!}{k! (2k+2n)!}$  et on considère les fonctions  $\varphi_n$  définies pour  $x$  réel

par  $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k,n} x^{2k+n}$  lorsque la série converge.

**I.3.**

**I.3.1.** Exprimer  $\varphi_0(x)$  et  $\varphi_1(x)$  à l'aide des fonctions usuelles.

**I.3.2.** Montrer que les fonctions  $\varphi_n$  sont indéfiniment dérivables sur  $\mathbf{R}$ .

**I.4.**

**I.4.1.** Calculer le quotient  $\frac{C_{k,n+1}}{C_{k,n}}$ .

**I.4.2.** En déduire l'expression de  $C_{k,n} - (2n+1)C_{k,n+1}$  en fonction de  $k$  et de  $C_{k,n+1}$ .

**I.4.3.** Pour  $x \neq 0$ , exprimer  $\varphi_n(x) - \frac{2n+1}{x}\varphi_{n+1}(x)$  en fonction de  $\varphi_{n+2}(x)$ .

**I.4.4.** On admet que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la fonction  $\varphi_n$  est solution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation  $(E_n)$ . En reprenant la notation de **I.2.**, on écrit  $\varphi_n(x) = y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$ . Quelle est la valeur de  $u_n$  ?

**I.5.** Dans cette question on suppose  $x \neq 0$ .

**I.5.1.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $\varphi_n(x) \neq 0$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $x \neq 0$ , on définit  $\gamma_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)}$ . Dans la suite de la question, on pourra utiliser **I.4.3.**

**I.5.2.** On suppose  $0 < x \leq 1$ , montrer l'inégalité  $\gamma_n(x) > 1$ .

**I.5.3.** Montrer la relation  $\gamma_n(x) = \frac{2n+1}{x} + \frac{1}{\gamma_{n+1}(x)}$ .

## PARTIE II

On note  $S$  l'ensemble des suites  $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  vérifiant :  $a_0 \in \mathbf{Z}$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n \in \mathbf{N}^*$ . Etant donné une suite  $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $S$ , on définit les suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  par :

$$p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = a_1$$

puis, pour  $n \geq 2$ , par :

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

**II.1.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on a  $q_n \geq n$ .

**II.2.** Relations entre les  $p_n$  et les  $q_n$ .

**II.2.1.** Pour  $n \geq 1$ , calculer  $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}$ .

**II.2.2.** Pour  $n \geq 2$ , calculer  $p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on définit  $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ .

**II.3.** Etude de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**II.3.1.** Pour  $n \geq 1$ , calculer  $x_n - x_{n-1}$  et pour  $n \geq 2$ , calculer  $x_n - x_{n-2}$  en fonction des  $a_k$  et des  $q_k$ .

**II.3.2.** En déduire que les suites  $(x_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  sont adjacentes.

**II.3.3.** On note  $\alpha$  la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . On se propose de démontrer par l'absurde que  $\alpha$  est un nombre irrationnel.

En supposant que  $\alpha = \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$ , avec  $d \in \mathbf{N}^*$ , et en utilisant l'encadrement  $0 < \alpha - x_{2n} < x_{2n+1} - x_{2n}$ , déterminer un entier  $k_n$  vérifiant  $0 < k_n < \frac{d}{q_{2n+1}}$ . En déduire que  $\alpha$  n'est pas rationnel.

Soit  $\lambda \in \mathbf{N}^*$  un entier naturel non nul fixé; on considère la fonction  $f$  définie pour tout  $t$  réel par  $f(t) = t^2 - \lambda t - 1$ .

**II.4.** Etude de la fonction  $f$ .

**II.4.1.** Tracer le graphe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-1, \lambda + 1]$ .

**II.4.2.** On note  $r_1$  et  $r_2$ , avec  $r_1 < r_2$ , les deux racines de  $f$ . Déterminer le signe et la partie entière de chacune des racines.

**II.5.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on prend  $a_n = \lambda$  et on considère la suite  $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**II.5.1.** Pour  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , calculer  $p_i$  et  $q_i$ .

**II.5.2.** Pour  $n \geq 1$ , exprimer  $q_n$  en fonction des  $p_k$  pour  $k \in \mathbf{N}$ . En déduire une expression de  $x_n$  en fonction des  $q_k$  pour  $k \in \mathbf{N}$ .

**II.5.3.** Exprimer  $q_n$  en fonction de  $r_1, r_2$  et  $n$ .

**II.5.4.** Déduire des questions précédentes une expression de  $x_n$  en fonction de  $r_1, r_2$  et  $n$ .

**II.5.5.** En déduire la valeur de la limite  $\alpha$  de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  en fonction de  $r_1$  et  $r_2$ .

**II.5.6.** On prend  $\lambda = 3$ . Calculer  $q_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ . En déduire deux nombres rationnels qui encadrent  $\alpha$  à  $10^{-4}$  près.

### PARTIE III

Etant donné une suite de nombres réels  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , telle que pour tout  $n \geq 1$  on ait  $b_n > 0$ , on définit la suite dont le terme général d'indice  $n$  est noté  $[b_0, b_1, \dots, b_n]$  par :

$$[b_0] = b_0, [b_0, b_1] = b_0 + \frac{1}{b_1}, \text{ puis pour } n \geq 1, [b_0, \dots, b_n, b_{n+1}] = \left[ b_0, \dots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{b_{n+1}} \right].$$

En particulier  $[b_0, b_1, b_2] = \left[ b_0, b_1 + \frac{1}{b_2} \right]$ .

**III.1.** Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  un élément de  $S$ . On lui associe les suites  $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définies dans **II**.

**III.1.1.** Ecrire  $[a_0, a_1]$  et  $[a_0, a_1, a_2]$  sous forme de fractions en fonction des  $a_i$ .

**III.1.2.** On suppose que, pour un entier  $n \geq 2$  fixé, on a  $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ .

Quel nombre rationnel obtient-on en remplaçant dans  $[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n]$ , le terme  $a_n$  par  $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$  ?

**III.1.3.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  on a  $[a_0, \dots, a_n] = x_n$ .

**III.1.4.** Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , montrer  $[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}$ .

Dans **II.3.**, on a montré que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers un nombre irrationnel  $\alpha$ . On note  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  et on note  $F$  l'application de  $S$  dans l'ensemble des nombres irrationnels définie par  $F(a) = \alpha = [a_0, a_1, \dots]$ . On admet que  $F$  est surjective.

**III.2.** Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel et soit  $a \in S$  une suite telle que  $\alpha = F(a) = [a_0, a_1, \dots]$ .

**III.2.1.** Comparer  $x_0, x_1$  et  $\alpha$ . En déduire que  $a_0$  est la partie entière de  $\alpha$ .

**III.2.2.** Pour  $k \in \mathbf{N}$ , on note  $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, \dots]$ . Montrer l'égalité  $\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$ . Donner une relation entre  $\alpha_k, \alpha_{k+1}$  et  $a_k$ .

**III.2.3.** Décrire un algorithme qui donne la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . En déduire que  $F$  est bijective.

**III.2.4.** On prend  $\alpha = \sqrt{3}$  et on note  $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in S$  la suite vérifiant  $F(a) = \sqrt{3}$ . Calculer  $a_0, a_1, a_2, a_3$  et exprimer  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  en fonction de  $\sqrt{3}$ . Déterminer la suite  $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**III.3.** Soit  $\mu \in \mathbf{N}^*$ . On note  $th$  la fonction tangente hyperbolique.

**III.3.1.** Dédurre des parties précédentes qu'il existe une suite  $a \in S$  telle que  $F(a) = \frac{1}{th\left(\frac{1}{\mu}\right)}$

et expliciter les termes de cette suite (on pourra utiliser les résultats du **I**).

**III.3.2.** On choisit  $\mu = 1$ . Pour  $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$  donner le tableau des entiers  $a_n, p_n, q_n$ . En déduire deux nombres rationnels qui donnent un encadrement de  $\frac{1}{th(1)}$  à  $10^{-4}$  près.