

(version dimanche 19 mai 2002 : 7h19)

CONCOURS E3A : ENSAM-ESTP-ECRIN-ARCHIMEDE 10 MAI 02 8h-11h : Mathématiques 2 MP
L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle $[c, d]$ de \mathbb{R} est affine s'il existe des réels A, B tels que $\forall x \in [c, d], f(x) = Ax + B$. Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} .

On note $\mathcal{C}(a, b)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Soit n un entier naturel non nul et soient a_0, a_1, \dots, a_n ($n + 1$) réels tels que : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$.

Ils définissent une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, ($0 \leq i < n$). On considère E le sous ensemble de $\mathcal{C}(a, b)$ formé par les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dont les restrictions à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ sont affines

Des exemples de fonctions de E :

(1)

Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. On note φ_i la fonction définie sur $[a, b]$ par : $\forall x \in [a, b], \varphi_i(x) = |x - a_i|$.

(1-a) Montrer que φ_i est un élément de E .

Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe un unique élément δ_i de E , vérifiant : $\delta_i(a_i) = 1$ et (1-b) pour tout $j \neq i, \delta_i(a_j) = 0$.

On pose $\mathcal{B} = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$ et $\mathcal{C} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, les fonctions φ_i et δ_i étant celles définies au (1).

(2)

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$.

(2-a)

Montrer que \mathcal{B} est une base de E .

(2-b)

Montrer que \mathcal{C} est une base de E . (indication : Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i = 0$. On pourra

(2-c)

étudier la fonction $\sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i = 0$ au voisinage de α_j , pour $j \in \{0, \dots, n\}$).

Un cas particulier. Soient $u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que $u < v < w$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue nulle

(3) en dehors de $]u, w[$, affine sur $[u, v]$ et sur $[v, w]$ et telle que $g(v) = 1$. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \alpha|x - u| + \beta|x - v| + \gamma|x - w|$.

Retour au cas général. Soit $f \in E$. On se propose d'exprimer formellement f sur la base \mathcal{C} .

(4)

Déterminer la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .

(4-a)

Par quel calcul matriciel pourrait-on obtenir, une expression de f comme combinaison linéaire de $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ (4-b) ?

Dans cette question on suppose la subdivision régulière, c'est à dire que pour tout i ($0 \leq i < n$), on a : (5) $a_{i+1} - a_i = \frac{(b-a)}{n}$.

(5-a)

Expliciter alors la matrice P de la question (4-a) et calculer son déterminant.

Pour tout i ($0 \leq i < n$), exprimer δ_i en fonction de φ_{i-1}, φ_i et φ_{i+1} .

(5-b)

On note C_0, C_1, \dots, C_n les $(n + 1)$ colonnes de la matrice P^{-1} . Expliciter C_1, \dots, C_{n-1} .

(5-c)

Finir le calcul de P^{-1} .

(5-d)

Exercice 2

On considère l'équation différentielle : $y''(x) - 3iy'(x) + (e^{ix} - 2)y(x) = 0$ (\mathcal{E}), où y représente une fonction de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (\mathcal{E}) définies sur \mathbb{R} et 2π -périodiques forment un \mathbb{C} -espace vectoriel que l'on notera $S_{2\pi}$.

Établir qu'une solution φ de l'équation (\mathcal{E}) est 2π -périodique si et seulement si $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi)$.

Soit f une solution 2π -périodique de l'équation (\mathcal{E}) . Démontrer que la série de FOURIER de f converge vers f en précisant le mode de convergence (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

Soit φ une solution 2π -périodique de l'équation (\mathcal{E}) définie par $\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$.

Déterminer une relation de récurrence liant c_{k-1} et c_k .

En déduire que : $\forall k \leq 1, c_k = 0$.

Exprimer c_k en fonction de k et de c_2 , pour tout $k \geq 2$.

Démontrer que l'espace vectoriel $S_{2\pi}$ n'est pas réduit à la fonction nulle et déterminer sa dimension. Toutes les solutions de l'équation (\mathcal{E}) sont-elles 2π -périodiques ?

On considère la solution φ obtenue en posant $c_2 = 1$ et on note φ_1 sa partie réelle et φ_2 sa partie imaginaire

$(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2)$.

Montrer que φ_1 et φ_2 sont respectivement paire et impaire.

Montrer que $\varphi_1(0) > 0$.

Établir que φ_1 change de signe au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$ en déterminant (α, β, γ) tels que : $0 < \beta < \gamma < 2\pi$ et $\varphi_1(\alpha) < 0, \varphi_1(\beta) > 0, \varphi_1(\gamma) < 0$.

On considère la fonction réelle f définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xy e^{-x-y}$.

On munit \mathbb{R}^2 de sa structure usuelle de plan euclidien orienté. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note Γ_λ la ligne de niveau λ de f , c'est à dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = \lambda$.

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x e^{-x}$.

Étudier les variations de la fonction φ et discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = \lambda$.

Montrer que φ restreinte à $] -\infty, 0[$ définit un C^∞ difféomorphisme de $] -\infty, 0[$ sur lui même.

Déterminer les extrémums de la fonction f (le cas échéant, on précisera la nature de l'extrémum obtenu : maximum ou minimum, global ou local).

Montrer que par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une ligne de niveau Γ_λ et une seule.

Déterminer dans le cas général un vecteur tangent à Γ_λ en (x_0, y_0) et préciser les exceptions.

Établir que toutes les courbes Γ_λ admettent un même axe de symétrie Δ que l'on précisera.

Pour tout $\lambda \neq 0$, on note Γ_λ^+ l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi-plan d'équation $x > 0$ et Γ_λ^- l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi plan d'équation $x < 0$.

On recommande de traiter la question (6) au fur et à mesure de l'avancement des question (4) et (5).

Soit $\lambda > 0$.

(4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour Γ_λ^+ soit non vide.

(4-a)

Montrer que dans ce cas, Γ_λ^+ est une partie bornée de \mathbb{R}^2 .

(4-b)

(4-c) Établir que la courbe Γ_λ^- peut être caractérisée par une équation de la forme $y = g_\lambda(x)$ où g_λ est une fonction C^∞ sur $] -\infty, 0[$ dont on précisera les variations et les limites.

(5) Dans ce qui suit on remplace la base canonique de \mathbb{R}^2 par la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et on note alors (X, Y) les nouvelles coordonnées du point (x, y) .

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, caractériser Γ_λ par une équation de la forme $F(X, Y) = \lambda$.

(5-a)

(5-b) On suppose $\lambda < 0$. Montrer que la branche Γ_λ^- de la courbe Γ_λ se caractérise par une équation de la forme $Y = G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction C^∞ dont on précisera les variations et les branches infinies (on utilisera la fonction φ définie en (1)). Comment obtient-on l'autre branche Γ_λ^+ ?

(5-c) On suppose $\lambda > 0$. Caractériser la branche Γ_λ^+ par une équation de la forme $Y = \pm G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction dont on étudiera les variations à l'aide de la fonction φ définie en (1).

Indiquer sur un graphique l'allure des diverses lignes de niveau de la fonction f .

(6)

FIN DU PROBLÈME