# e3a PC Mathématiques 3

## Première partie : étude de l'application :

$$\mathcal{L}_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP''(X) + (X-4)P'(X) - 3P(X) \end{array}$$

### 1.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{L}_n$

(a) La dérivation est linéaire et fait chuter le degré d'un polynôme non nul d'une unité, alors grâce aux propriétés des lois + et $\times$ de l'algèbre $\mathbb{R}_n[X]$ , on peut dire que $\mathcal{L}_n$ est linéaire et que l'image d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme de degré au plus $n$ .

$$\boxed{\mathcal{L}_n \ \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$$

(b) Soit $k$ entier entre 0 et $n$ : $\mathcal{L}_n(X^k) = k(k-1)X^{k-1} + k(X-4)X^{k-1} - 3X^k = (k-3)X^k + (k(k-1) - 4k)X^{k-1}$.
$\mathcal{L}_n(X^k) = (k-3)X^k + (k^2-5k)X^{k-1}$. On en déduit la matrice $L_n$ de $\mathcal{L}_n$ dans la base canonique :

$$L_n = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & -6 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & n-2 & n(n-5) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n-3 \end{bmatrix}$$

(c) Cette matrice est triangulaire : ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de $\mathcal{L}_n$ . Ils sont distincts 2 à 2 ,donc $\mathcal{L}_n$ a exactement $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres simples :

$$\boxed{\mathcal{L}_n \text{ est diagonalisable}}$$

(d) Soit $P$ un polynôme non nul de degré $p$ et de coefficient dominant $a_p$ . Le calcul précédent montre que si $p \neq 3$, alors $\mathcal{L}_n(P)$ est aussi de degré $p$ avec pour coefficient dominant $(p-3)a_p$.
Si $p = 3$, le degré de $\mathcal{L}_n(P)$ est au plus 2..

$$\boxed{P \in \ker(\mathcal{L}_n) \ et \ P \neq 0 \implies \deg(P) = 3}$$

(e) Un polynôme non nul de $\ker(\mathcal{L}_n)$ est donc de la forme $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ avec $a_3 \neq 0$. Comme $\ker(\mathcal{L}_n)$ est un espace vectoriel, on peut prendre $a_3 = 1$.
$\mathcal{L}_n\ (P) = -6X^2 + a_2(-X^2 - 6X) + a_1(-2X - 4) - 3a_0 = -(a_2+6)X^2 - (6a_2 + 2a_1)X - 4a_1 - 3a_0$.
$P \in \ker(\mathcal{L}_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_2 + 6 = 0 \\ 6a_2 + 2a_1 = 0 \\ 4a_1 + 3a_0 = 0 \end{cases}$ , système qui se résout en : $a_2 = -6,\ a_1 = 18,\ a_0 = -24$ .
Le seul polynôme unitaire de $\ker(\mathcal{L}_n)$ est donc $\Pi = X^3 - 6X^2 + 18X - 24$.

$$\boxed{\ker(\mathcal{L}_n) = Vect(\Pi)}$$

(f) Si $\mathcal{L}_n$ est un automorphisme, 0 ne figure pas sur la diagonale de $L_n$, donc la plus grande valeur propre $n-3$ est inférieure ou égale à $-1$ , soit $n \leq 3 - 1 = 2$.

Si $n=1$ : $L_1 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ est inversible.

Si $n=2$ : $L_2 = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est aussi inversible .

$$\boxed{\mathcal{L}_n \text{ inversible } \iff n \leq 2}$$

### 1.2 Un exemple : n=5

(a) Comme en 1b) $L_5 = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $Sp(\mathcal{L}_5) = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ et chaque sous espace propre est une droite .
Nous connaissons le noyau de $\mathcal{L}_5$ d'après 1d ) et la lecture de la première et de la dernière colonne de la matrice $L_5$ nous donne deux droites propres :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{L}_5(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) = 0 \\ \mathcal{L}_5(1) = -3 \\ \mathcal{L}_5(X^5) = 2X^5 \end{array} \right.}$$

(c) La combinaison suivante des deux premières colonnes donne : $\mathcal{L}_5(4-3X) = 6X$ , donc $X \in \mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)$..
On voit aussi que $\mathcal{L}_5(X^3) = -6X^2$ et $\mathcal{L}_5(X^4) = X^4 - 4X^3$ .Compte tenu des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle ( ils sont dans $\mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)$) on a déjà :
$Vect(1, X, X^2, X^4 - 4X^3, X^5) \subset \mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)$.
Les 5 polynômes générateurs sont de degrés différents 2 à 2 , ils forment donc une famille libre c'est à dire une base de $Vect(1, X, X^2, X^4 - 4X^3, X^5)$.
Le théorème du rang nous dit que , puisque $\dim(\ker \mathcal{L}_5) = 1$, on a $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{L}_5) = 6 - 1 = 5$. L'inclusion des sous espaces est une égalité car ils ont même dimension :

$$\boxed{Vect(1, X, X^2, X^4 - 4X^3, X^5) = \mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)}$$

(d) Les polynômes $P$ solutions de (i) sont ceux qui vérifient $\mathcal{L}_5(P) = X^5$,c'est à dire $\mathcal{L}_5(P - \dfrac{X^5}{2}) = 0$ :

$$\boxed{P = \frac{X^5}{2} + \lambda(X^3 - 6X^2 + 18X - 24) \text{ , } \lambda \in \mathbb{R}}$$

Démontrons par l'absurde que $X^4 \notin \mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)$ :

Si il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, les lignes 4 et 5 sont contradictoires .

$$\boxed{L'équation\ (ii)\ n'a\ pas\ de\ solution}$$

(e) D'après 2c) $1, X, X^2, X^5$ sont dans $\mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)$, ainsi que $X^4 - 4X^3$. On vient de voir que $X^4 \notin \mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)$, alors $X^3$ n'appartient pas non plus à ce sous espace vectoriel $\mathrm{Im}(\mathcal{L}_5)$ :

| |
|---|
| Pour $p \in \{0,1,2,5\}$ l'équation différentielle admet une droite affine de solutions .<br>Pour $p \in \{3,4\}$ , il n'y a pas de solution . |

## Deuxième partie : étude locale d'une solution particulière de l'équation différentielle $(E) \quad xy" + (x-4)y' - 3y = 0$

2.1 Soit $\phi$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ . Par définition $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \phi"(x) = \dfrac{4-x}{x}\phi'(x) + 3\phi(x). \quad (1)$
Démontrons par récurrence sur $n \geq 2$ que $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ :
$\forall n \geq 2$ , si on suppose $\phi$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ , $\phi'$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'après l'égalité (1) , $\phi"$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ , c'est à dire $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui prouve l'hérédité de notre propriété.

$\boxed{\text{Toute solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2.2 L'équation (E) est linéaire d'ordre 2 et le coefficient de $y"$ est $x$ , qui ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Comme $x_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ le théorème de Cauchy dit qu'il existe une et une seule solution $\phi$ sur $\mathbb{R}_+^*$ satisfaisant la condition initiale $\phi(x_0) = 2$ et $\phi'(x_0) = -2$.

2.3 La formule de Leibnitz permet de calculer les dérivées nième des produits suivants :
a) $x \mapsto x\phi"(x)$ . On obtient : $x \longmapsto x\phi^{(n+2)}(x) + n\phi^{(n+1)}(x)$.
b) $x \longmapsto (x-4)\phi'(x)$. On obtient : $x \longmapsto (x-4)\phi^{(n+1)}(x) + n\phi^{(n)}(x)$.
Comme la fonction $x \longmapsto x\phi"(x) + (x-4)\phi'(x) - 3\phi(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ , sa dérivée nième aussi :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x\phi^{(n+2)}(x) + n\phi^{(n+1)}(x) + (x-4)\phi^{(n+1)}(x) + n\phi^{(n)}(x) - 3\phi^{(n)}(x) = 0.$
en particulier au point $x = 1$ :

$$u_{n+2} + (n-3)(u_{n+1} + u_n) = 0$$

2.4 D'après 2.1 $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ qui contient 1 . Le théorème de Taylor Young assure l'existence d'un développement limité à tout ordre en $x_0 = 1$. En particulier à l'ordre 3 , il s'écrit :
$\phi(x) = \phi(1) + \phi'(1)(x-1) + \dfrac{\phi"(1)}{2}(x-1)^2 + \dfrac{\phi^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$
Sachant que $u_0 = 2$ et $u_1 = -2$ la formule établie en 2.3 permet de calculer $u_2 = 0$ et $u_3 = -4$.

$$\boxed{\phi(x) = 2 - 2(x-1) - \frac{2}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$$

2.5 On lit sur cette formule que la droite d'équation $y = 2-2(x-1)$ est tangente à $\Gamma$ au point $M_0(1,2)$ et que ce point est un point d'inflexion parce qu'au voisinage de $x_0 = 1$ le signe de $\phi(x) - (2-2(x-1)) = \dfrac{2}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ est celui de $x-1$ :

$\boxed{\text{La tangente au point d'inflexion } (1,2) \text{ a pour équation } y = 4 - 2x}$

## Troisième partie : Recherche de solutions de (E) développables en série entière

3.1 Les solutions polynomiales de $(E)$ sont les fonctions polynômes $P$ qui vérifient $\mathcal{L}_n(P) = 0$. D'après 1.1e) il s'agit de :

$$\boxed{P = \lambda(X^3 - 6X^2 + 18X - 24)\ , \lambda \in \mathbb{R}}$$

3.2 Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in ]-R, R[$.

(a) Une série entière se dérive terme à terme sur son intervalle de convergence, alors :
$\forall x \in ]-R, R[. \quad xf"(x) + (x-4)f'(x) - 3f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
Des séries qui convergent s'ajoutent terme à terme , alors :

$\forall x \in ]-R,R[ .\ \ xf"(x)+(x-4)f'(x)-3f(x) = -3a_0-4a_1+\sum_{p=1}^{\infty}[p(p+1)a_{p+1}+pa_p-4(p+1)a_{p+1}-3a_p]x^p$

Par unicité du développement en série entière, cette fonction est nulle sur $]-R,R[$ si et seulement si on a : $-3a_0-4a_1=0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad (p+1)(p-4)a_{p+1}+(p-3)a_p=0$, ce qu'on peut résumer par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)(n-4)a_{n+1}+(n-3)a_n=0$$

(b) Si $f$ est solution il faut $a_4=0$ et $\forall n \geq 5\ \ a_{n+1}=\dfrac{-(n-3)}{(n+1)(n-4)}a_n$.

Vérifions par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la formule $a_{n+5}=(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+5)!}5!a_5$ est vraie :

Pour $n=0$ on a bien $(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+5)!}=\dfrac{1}{5!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ , si $a_{n+5}=(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+5)!}5!a_5$, alors la formule de récurrence donne

$a_{n+6}=\dfrac{-(n+2)}{(n+6)(n+1)}\times(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+5)!}5!a_5=(-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{(n+6)!}5!a_5$ ,ce qu'il fallait démontrer.

Réciproquement, considérons la série entière $\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+5)!}5!x^{n+5}$ pour laquelle

$a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=0$ et $a_5=1$ et $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{(n-3)}{(n+1)(n-4)}$..

D'après le critère de d'Alembert comme $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0$ quand $n\to\infty$ son rayon de convergence est infini.

D'après 3.2a) $\psi$ estune solution.

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+5)!}5!x^{n+5} \qquad , \quad R=+\infty$$

(c) On a démontré que si $f$ est solution développable en série entière sur $]-R,R[$ elle est de la forme $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_5\psi(x)$ . Alors $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ est une solution de $(E)$ puisque combinaison linéaire $P=f-a_5\psi$.
D'après 3.1 : $\exists\lambda\in\mathbb{R}\ \ P(x)=\lambda(x^3-6x^2+18x-24)$.
Réciproquement $\forall(\lambda,a_5)\in\mathbb{R}^2\ f(x)=\lambda(-24+18x-6x^2+x^3)+a_5\psi(x)$ est une fonction développable en série entière avec rayon de convergence $R=+\infty$ et elle est soluton de $(E)$ parce que combinaison linéaire de $\Pi$ et $\psi$ qui sont des solutions de $(E)$.
On a donc trouvé toutes les solutions $f$ développables en série entière. Elles sont de la forme :

$$\boxed{f=\lambda\Pi+a_5\psi,\ (\lambda,a_5)\in\mathbb{R}^2}$$

3.3 Une conséquence du théorème de Cauchy est que l'ensemble des solutions de $(E)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ où le coefficient $x$ de $y"$ ne s'annule pas est un espace vectoriel de dimension 2 .
Nous connaissons 2 solutions : les restrictions de $\Pi$ et $\psi$ à $\mathbb{R}_+^*$ ; l'une est polynomiale, l'autre pas ; elles sont donc linéairement indépendantes et forment une base de l'ensemble des solutions de $(E)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ .
On en déduit la forme de toute solution $F$ :

$$\boxed{\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ F(x)=\alpha\Pi(x)+\beta\psi(x)}$$

3.4 Sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$, le coefficient $x$ ne s'annule pas non plus : l'ensemble des solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est un espace vectoriel de dimension 2 .
Les restrictions de $\Pi$ et $\psi$ à $\mathbb{R}_-^*$ sont des solutions linéairement indépendantes .
On a de même la forme de toute solution $G$ :

$$\boxed{\exists(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall x\in\mathbb{R}_-^*\ \ G(x)=\gamma\Pi(x)+\delta\psi(x)}$$

3.5 Les coordonnées $\alpha$ et $\beta$ de la fonction $\phi$ définie en 2.2 se calculent par $\begin{cases} \alpha\Pi(1)+\beta\psi(1)=2 \\ \alpha\Pi'(1)+\beta\psi'(1)=-2 \end{cases}$. Ce système est de Cramer parce que son déterminant est le wronskien au point 1 : $W(1)=\begin{vmatrix} \Pi(1) & \psi(1) \\ \Pi'(1) & \psi'(1) \end{vmatrix}$. Cette fonction $W$ ne prend jamais la valeur 0 parce que $\Pi$ et $\psi$ sont linéairement indépendantes .
Notons $(\alpha_0,\beta_0)$ la solution de ce système de Cramer On peut prolonger $\phi$ à $\mathbb{R}$ avec :

$\boxed{f=\alpha_0\Pi+\beta_0\psi \text{ prolonge } \phi \text{ en une fonction de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}}$

3.6 Soit $f$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ . D'après 3.3 et 3.4 :
$\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \begin{cases} \forall x>0 \quad f(x)=\alpha\Pi(x)+\beta\psi(x) \\ \forall x<0 \quad f(x)=\gamma\Pi(x)+\delta\psi(x) \end{cases}$
Le raccordement par continuité en $x=0$ exige : $f(0)=-24\alpha=-24\gamma$, c'est à dire $\alpha=\gamma$.
Le raccordement des dérivées premières et secondes est assuré quand $\alpha=\gamma$ parce que $\psi'(0)=\psi"(0)=0$, d'où :$f\prime(0)=\alpha\Pi'(0)$ et $f"(0)=\alpha\Pi"(0)$.
Notons $F(x)=\begin{cases} \psi(x) & si\ x\geq 0 \\ 0 & si\ x\leq 0 \end{cases}$ et $G(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\geq 0 \\ \psi(x) & si\ x\leq 0 \end{cases}$
Ce sont des solutions sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède et nous avons vu que si $f$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ $\exists(\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^3$ $f=\beta F+\delta G+\gamma\Pi$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (E) sur } \mathbb{R} \text{ est l'espace vectoriel de dimension 3 engendré par } (F,G,\Pi)}$
$F$ et $G$ sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$ , de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, mais leur dérivée d'ordre 5 a une discontinuité en 0.

3.7 Calculons le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de $x=0$ de $f(x)=(x+4)e^{-x}$ :
$f(x)=(4+x)(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5+o(x^5)=4-3x+x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$.
Par ailleurs , vérifions que $f$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ :
$f'(x)=(-x-3)e^{-x}$ et $f"(x)=(x+2)e^{-x}$
$xf"(x)+(x-4)f'(x)-3f(x)=(x^2+2x-x^2-3x+4x+12-3x-12)e^{-x}=0$.
$f$ est développable en série entière , alors d'après 3.2c) :
$\exists(\lambda,a_5)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\lambda(x^3-6x^2+18x-24)+a_5\psi(x)$ , cequi nous donne comme développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 :
$f(x)=-24\lambda+18\lambda x-6\lambda x^2+\lambda x^3+\alpha_5x^5+o(x^5)$ . L'identification des coefficients permet de calculer $\lambda=-\frac{1}{6}$ et $\alpha_5=\frac{1}{120}$ et de trouver effectivement :
$\forall x\in\mathbb{R} \quad \psi(x)=120\left(f(x)+\frac{1}{6}(x^3-6x^2+18x-24)\right)$ soit après simplifications

$\boxed{:\forall x\in\mathbb{R} \quad \psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+5)!}5!x^{n+5}=120(-4+3x-x^2+\frac{1}{6}x^3+(x+4)e^{-x}}$