ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2002 FILIÈRE PC

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

***

Ce problème a pour but principal l'étude des coefficients diagonaux des diverses matrices semblables à une matrice donnée.

On désigne par n un entier ≥ 2, par $M_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices à coefficients réels, à n lignes et n colonnes, et par I la matrice identité; on appelle *scalaires* les matrices de la forme λI où λ est un réel. On rappelle que deux matrices A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible Q vérifiant $B = QAQ^{-1}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans deux bases de $\mathbf{R}^n$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes:

a) Si une matrice A est non scalaire, il existe un vecteur X de $\mathbf{R}^n$, non nul et non vecteur propre pour A.

b) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, i et $j \in \{1, ..., n\}$. Il existe une matrice B semblable à A telle que

$$b_{i,i} = a_{j,j} \quad , \quad b_{j,j} = a_{i,i} \quad , \quad b_{k,k} = a_{k,k} \quad \text{pour tout}\, k \neq i, j\,.$$

Deuxième partie

2. On se donne une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ de trace nulle et on se propose de démontrer qu'il existe une matrice B semblable à A ayant tous ses coefficients diagonaux nuls.

a) Montrer que si A est non nulle, il existe une base $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $AX_1 = X_2$.

b) Conclure en procédant par récurrence sur n.

3. *Applications numériques.* Dans chacun des cas considérés, on indiquera une matrice B répondant à la question et une base qui lui correspond.

a) $n = 2$, A est diagonale avec coefficients diagonaux $1, -1$.

b) $n = 3$, A est diagonale avec coefficients diagonaux $1, 0, -1$.

4. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non scalaire.

Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux de la forme $(t, 0, ..., 0)$, et exprimer t en fonction des coefficients diagonaux de A.

5. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non nulle. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux tous non nuls.

Troisième partie

On dira que deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont *orthosemblables* s'il existe une matrice orthogonale Q vérifiant $B = QAQ^{-1}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans deux bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$. Pour toute matrice A on pose

$$f(A) = \sup\{|a_{i,i} - a_{j,j}| : i, j = 1, ..., n\} \quad .$$

On se donne une matrice A et on se propose de démontrer qu'il existe une matrice B, orthosemblable à A et ayant tous ses coefficients diagonaux égaux.

6. Démontrer l'assertion dans le cas où $n = 2$.

7. On suppose maintenant n quelconque et les $a_{i,i}$ non tous égaux.

a) Montrer qu'on peut supposer $f(A) = |a_{1,1} - a_{2,2}|$.

b) Construire une matrice A', orthosemblable à A et telle que

$$a'_{1,1} = a'_{2,2} \quad , \quad a'_{i,i} = a_{i,i} \quad \forall i \geq 3 \quad , \quad \left|a'_{1,1} - a'_{i,i}\right| < f(A) \quad \forall i \geq 3.$$

c) Construire une matrice A'', orthosemblable à A et telle que $f(A'') < f(A)$.

On désigne par $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales, et par E_A celui des matrices orthosemblables à A.

8.

a) Montrer que E_A est une partie compacte de $\mathbf{R}^{n^2}$.

b) Montrer que la restriction de la fonction f à E_A atteint son minimum.

c) Conclure.

9. *Application numérique.* On prend $n = 3$ et A diagonale avec coefficients diagonaux $(1, 0, 0)$; on note A_m, $m = 0, 1, ...$ les matrices successives obtenues par la méthode précédente, de sorte que

$$diag\,(A_0) = (1, 0, 0) \quad , \quad diag\,(A_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \quad , \quad diag\,(A_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad , \quad \text{etc.}$$

Déterminer $f(A_m)$ et les coefficients diagonaux de A_m.

Quatrième partie

On munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire usuel noté $(.|.)$ et de la norme correspondante $\|.\|$.
Pour toute matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ on pose

$$R(A) = \{(AX|X) : \|X\| = 1\}.$$

10. Démontrer les assertions suivantes:

a) $R(A)$ contient les valeurs propres réelles de A ainsi que ses coefficients diagonaux.

b) $R(A)$ est un intervalle fermé borné de $\mathbf{R}$.

c) Si A est symétrique et de trace nulle, le nombre 0 appartient à $R(A)$.

11. Montrer que si la trace t de A appartient à $R(A)$, il existe une matrice B orthosemblable à A avec coefficients diagonaux $(t, 0, ..., 0)$.

Cinquième partie

On note $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A.

12. On se donne une matrice non nulle A de $M_n(\mathbf{R})$ et on note B une matrice semblable à A ayant tous ses coefficients diagonaux non nuls.

a) Trouver une matrice Y telle que l'on ait

$$Sp(Y) = \{1\} \quad \text{et} \quad Sp(B+Y) \cap Sp(Y) = \varnothing$$

b) Construire une matrice X non nulle telle que l'on ait

$$Sp(A+X) \cap Sp(X) = \varnothing$$

13. On désigne par T une application linéaire de $M_n(\mathbf{R})$ dans lui-même qui transforme toute matrice inversible en une matrice inversible.

a) Vérifier que l'on a

$$Sp\left(T(I)^{-1}\,T(A)\right) \subset Sp(A)$$

b) Montrer que l'application T est inversible.

* *
*