(version jeudi 24 octobre 2002 : 11h44)

nom :

spé MP1 Carnot DIJON

(Rajouter à TP :

(Toute amélioration ou remarque constructive seront les bienvenues et pourront être communiquées à VIDIANI 64 r de l'Europe 21121 Fontaine les Dijon 03 80 56 65 53 ou 03 85 45 37 08 ou lg_vidiani@ipac.fr)

C'est en 1930 que VAN DEN WAERDEN (Bartel, Leenert Amsterdam 1903), construisit son exemple de fonction continue, dérivable nulle part. Ses travaux algébriques servirent de base au groupe Bourbaki (1936) ; le fait qu'il avait écrit son traité (Modern Algébra) en COLLABORATION avec ARTIN et NOETHER, idée de travail en commun, qui était une nouveauté à l'époque, inspira leur façon de travailler. Pourquoi ce qui était bon pour des cerveaux exceptionnels, ne serait-il pas bon pour d'autres ? Les échanges libres ont toujours été une caractéristique des activités intellectuelles par opposition à tout ce qui est commercial, ou industriel,... ; initiée 1968, accentuée 1981, la rétention (moins il y a d'herbivores dans un pré (*), plus il y a d'herbe sans efforts, pour celles qui y sont !) d'informations (heureusement diminuée par l'usage d'internet, qui permet maintenant l'accès à certaines de ces informations à "flux tendu") diverses, intellectuelles, officielles ou techniques, (y compris les références complètes et précises), l'absence d'échanges accessibles à tous a été une des raisons de la baisse d'influence des classes préparatoires ; Celles ci ne se revaloriseront qu'à ce prix ; Par exemple la bourse d'échange, initialement créée en 1993 sous ma suggestion pressante, réparait le fait anormal que les corrigés du contrôle à postériori, datant de près de 20 ans n'étaient accessibles que par les responsables, alors qu'en physique ils l'étaient depuis 4 ans environ ; la confrontation des solutions, des méthodes, entre les deux contrôleurs puis les lecteurs, permettaient par comparaison des techniques assurées des anciens et les idées neuves des collègues frais-émoulus, une vision nouvelle des concepts, qui était valorisante pour tous. Il en est de même des échanges que les solutions de question d'oral récentes (2001) reproduites ci dessous ont provoqués ; rester dans son coin n'est jamais une solution pour prouver sa supériorité : il faut maintenant la prouver, et la maintenir, dans la confrontation réelle et non par le silence hautain et méprisant, sûr de lui et dominateur (**). Enfin, si la doctrine de la gratuité (photocopies, bibliothèques,..) est normale jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire, elle est intrinsèquement perverse après, en particulier dans nos classes : dé-responsabilisation, risque de limitation par prétexte de lignes budgétaires.

(*)(par exemple on a l'embarras du choix près de Tournus : les prés des Moitiés, le pré du Breuil, les prés de la Levée, le prés de l'Eau, le champ Brulé sud de la croix Vacher, le champ Sémard, le champ Maréchal sud est des Rigolettes, le champ Pénétre,...) (**) (Voir (*))

Je ne tape que les exercices ayant une originalité, apparaissant pour la première fois à l'oral (dans la RMS depuis 44 ans) sinon leur référence est soit indiquée en bas, soit dans chaque TD **MP1** thématique. Pour les autres, soit une solution flash est indiquée en fin de ce fichier, soit dans la marge du listing des sujets.

O1 rms num 2 : 18 02 2002 ex : 1-443

veut dire améliorable

(À FAIRE ??)

2 $P(k) = l^n$ (=planche 3) et lien avec planche 39 $\sqrt{P(n)}$

6* rotations

20 SE nulle sur un sous arc. (principe du max ?)

23 Convexe, gradient et Stokes : facile si C2 avec Taylor FQ positive

24 Système différentiel

29-info * Fibonacci ;

30-info fonctions croissantes (voir Comtet)

32-info Génome ;

46 Norme subordonnée groupe de matrices inversibles dans une boule

60 Padé, dense

134 Majorer norme par le rang

237 Ordre

264 inf sup et normes équivalentes cf Br 76 p 29 et références O 2000 86 en TEX ; Br 88 p 178; Tauvel ronéo Poitiers p66'

309* (d) injectivité et surjectivité

333 alignement (gr)

PLANCHES :

Planche (3) opérateur Delta ; Planche(5) déplacement sur les arètes d'un cube sommes avec répétition cf Comtet C_{8+n-1}^{n} ? ; planche(40) 2ème th de Riemann comparaison série et intégrale ronéo et cours ; planche (62) Lambert : Vauthiers +Leichtnam 145 ;

À faire thématisé :

(entre parenthèses)= déja faits :

Topologie

4 adhérence ; 6* connexe ; 9 norme invariante cf Br et Oraux antérieurs et conditionnement ; 46 norme ; 51* complet ; 53* distance ; 60 Padé, dense ; 65* compact ; (166 adhérence cf 2000) ; 268* pseudo dérivation et densité ; 378 projecteur fermé ;

Convexité

12*, 15*, 23, (25*),

PSEUDO solution

11 voir 26 juin 2001 ; 21* ; 28* aire ;

Morphisme

3* matrices ; (42) factorisation Mines et leichtnam 73;

Tchebycheff "le TChé"

11 voir thème topo ; 76* ;

BLOCS

(89) Voir GC, Leichtnam p146 ; Blocs vuibert p74, essai par pol minimal ; généralisation bloc p77 ;

Factorise

40 polynôme, passer en polaires ;

VP AB connu

(147) TPE 92 et TP (et solutions diverses Hormière) Leichtnam p 76 ; Lafond le 14 juin 02 dit que c'est un exercice de Putnam 1969 ;

(Questions classiques à Améliorer O1 + :

9 Norme juin 95 p 774 + O 98 204

11 Projecteur atteint : 26 juin 2001 p 997 et X 78 environ

18 Weierstrass à coefficients entiers, cf Râ : rendre plus compact

20 maxi atteint sur la frontière ; principe du max ;

24 système produit vectoriel

27 STURM

28 aire balayée ; pseudo*

44 LIE cf Râ algèbre

74 Somme de polynômes

79 majorer (cf Mir et tp 0)

130 carré

139 Vp commune (cf blocs 106

173 sup

335 axe de symétrie

346 stables cf br 82 et tp 12-13

369 Projecteur cf TP

378 Noyaux et images ; fermés et complets

428 Maximum de FQ

Oral-O1 01 RMS

(Ce fichier sera joint à la bourse d'échange en TEX en juin 2002)

Soit $(\mathbf{x_1},...,\mathbf{x_n}) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{n}}$, où $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$. Établir l'existence d'une partie I non vide de $[[\mathbf{1},\mathbf{n}]]$ telle que n divise $\sum\limits_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathbf{x_i}$.

(Solution Gozard 6 mars 02) On pose $E_1 = \{x_1\}, ..., E_n = \{x_1, ..., x_n\}$ et $f : \{E_1, ...?E_n\} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par $f(E_p) = \sum\limits_{u\in E_p} \overline{u} = \sum\limits_{i=1}^{p} \overline{x_i} = \overline{\sum\limits_{i=1}^{p} x_i}$.

- Premier cas f injective. alors f est bijective (ensemble fini) donc il existe $k \in [[1,n]]/f(E_k) = \overline{0}$
- Second cas f non injective : $\exists p < q$ tel que $f(E_p) = f(E_q)$. Alors $X = E_p \backslash E_q$ vérifie $\sum\limits_{x\in X} \overline{x} = f(E_p) - f(E_q) = \overline{0}$.

Dans les deux cas, il existe une partie $I \in \mathcal{P}([[1,n]])$ telle que $\overline{\sum\limits_{i_i n I} x_i} = \overline{0}$.

(O 5) Nilpotentes-

Trouver le sous espace de $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$ engendré par les matrices nilpotentes.

(Solution 8 mars Pinguet+ Vidiani tableau salle prof Bvd Thiers)

Notons H le sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices nilpotentes, et G l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle, donc à trace nulle, et par linéarité de la trace $G \subseteq H$.

Si $M \in H$ on montre par récurrence (voir excellent ronéo du cours) que M est semblable à une matrice de diagonale nulle, qui se décompose en deux triangulaires l'une inférieure, l'autre supérieure, à diagonales nulles donc nilpotentes : donc $H \subseteq G$ et enfin $H = G$.

Le sous espace de $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$ engendré par les matrices nilpotentes est celui des matrices de trace nulle

---

(O 8) projecteurs et stabilité

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que E est somme directe orthogonale de sous espaces vectoriels de dimension 1 ou 2 stables par p et q.

(B126)

(La solution suivante plaira à Arnaud Pinguet :)

La propriété est vraie en dimension au plus 2. L'admettant pour tout espace de dimension strictement inférieur à n, nous allons la prouver pour n supposé supérieur ou égal à 3.

Tout projecteur orthogonal étant auto-adjoint (cours) $P* = p$ et $q* = q$.

$p - q$ étant auto-adjoint, admet au moins une valeur propre $s \in \mathbb{R}$ de vecteur propre associé $x \neq 0$ tel que $(p - q)(x) = sx$.

Soit $V = Vect(x, p(x))$, de dimension 1 ou 2, d'orthogonal $V^\perp$. Pour tout $y \in V$ on a :

$$\begin{cases} p(x) = p(ax + bv(x)) = (a+b)p(x) \in V \\ \\ q(y) = q(ax + bv(x)) = aq(x) + bq(sx + q(x)) \\ \qquad = (a + b(s+1))q(x) = (a + b(s+1))(p(x) - sx) \in V \end{cases}$$

l'astuce est là

Donc V est stable par p et q. Il en est de même pour $V^\perp$, puisque pour tout $(y,z) \in V \times V^\perp$, on a :

$$\begin{cases} (y|p(z)) = (p*(y)|z) = (p(y)|z) = 0 \\ (y|q(z)) = (q*(y)|z) = (q(y)|z) = 0 \end{cases}.$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au sous espace $V^\perp$ de dimension strictement inférieure à n car les restrictions de p et q à $V^\perp$ en sont des projecteurs orthogonaux.

(solution d'Arnaud Pinguet 15-4-02)

On a la variante suivante pour obtenir un sous espace stable par p et q de dimension ≤ 2 et ≥ 1.

☐ Si $pqp = 0$: Soit $x \in Imp\backslash\{0\}$ (on suppose p non nul, le résultat étant clair sinon).

Alors $F = vec(x, q(x))$ est stable par p et q, car $p(x) = x$, $p(q(x) = \underbrace{(pqp)}_{=0}(x) = 0$, $q(x) = q(x)$ et $q(q(x)) = q(x)$ et on a $dimF \in \{1, 2\}$.

□ On suppose $pqp \neq 0$: pqp est autoadjoint et non nul, donc il existe $x \in E\backslash\{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tel que $(pqp)(x) = \lambda x$.
Alors $F = vec(x, q(x))$ est stable par p et q, car $p(x) = x$ (car $x = \frac{1}{\lambda}(pqp)(x) \in Imp$),
$p(q(x)) = (pqp(x) = \lambda x$, $q(x) = q(x)$ et $q(q(x)) = q(x)$ on a encore $dimF \in \{1, 2\}$.

Q, Tchebytcheff, Saint Ex

(O 10)

> **(a) Étudier la suite $\mathbf{u_n = \left((\frac{3}{5} + i\frac{4}{5})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}}$.**
> **(b) Quelles sont les racines de l'unité sont les parties réelles et imaginaires sont rationnelles ?**

(Pour (a) cela traine partout ;: Br 86 p 186, capes 76, TP0, gazette novembre 93, AR 34 Q 18, Polygônes réguliers à sommets dans un réseau, exercices de Tauvel, Arn algèbre, Moisotte, Péréalo, ...)

(a) Il faut savoir que les seuls θ réels tels que $\frac{\theta}{\pi}$ soit rationnel sont tels que $\cos\theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Si $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q}$ (notations évidentes, p et $q > 0$ entiers premiers entre eux. Classiquement (cours) introduisons les polynômes de Tchebytcheff $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$; la relation $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ donne $T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$; par récurrence $S_n(2X) = 2T_n(X)$ est pour $n > 0$ un polynôme unitaire à coefficients entiers en $2X$: $S_1(Y) = Y$; $S_2(Y) = YS_1 - 2 = Y^2 - 2$;

Or $S_q(2\cos(\theta) = S_q(2p\pi) = 2$: donc $Y = 2\cos\theta$ est solution rationnelle de $Y^q + ... = 2$; comme le coefficient dominant est 1 et que les autres coefficients sont entiers, seuls des rationnels entiers conviennent. Mais comme $\cos\theta \in [-1, 1]$ on a $2\cos\theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Comme $\frac{3}{5}$ n'est pas dans cette liste on en déduit que si l'on pose $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5} = exp(i\theta)$ alors $u_n = exp(in\theta + 2ik\pi)$ et comme $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel, l'ensemble des $n\theta + 2k\pi$ avec $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ par le lemme de densité.

la suite proposée est divergente dense dans $\mathbb{U}$

(b) On va tomber sur le même genre d'équation diophantienne que dans le problème dit du "Pharaon" que Saint Exupéry proposa au Mess de son escadrille à Borgo près de l'aéroport de Bastia Ajjacio en Corse, peu avant sa disparition aux commandes de son Lignthning P-38 numéro 223, le 31 juillet 1944, durant sa 9ème mission photographique sur la région Annecy-Grenoble.

Posant $\cos\theta = \frac{a}{c}$ et $\sin\theta = \frac{b}{c}$ avec (a, b, c) premiers entre eux dans leur ensemble, on a $(\cos^2 + \sin^2 = 1$ donc $a^2 + b^2 = c^2$.

Deux d'entre eux sont des impairs, ce ne peut être a et b car on aurait $a = 2a' + 1, b = 2b' + 1$ qui donnerait $c^2 = 4a'^2 + 4b'^2 + 4a' + 4b' + 2$; c serait donc pair $c = 2c'$ et on aurait $4c'^2 = 4a'^2 + 4b'^2 + 4a' + 4b' + 2$ et 4 diviserait 2...

Donc c et par exemple a sont impairs et $b = 2b'$ est pair.

$b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a) = 4b'^2$. a et c étant premiers entre eux, tout diviseur commun à $c - a$ et $c + a$ devant diviser leur somme et leur différence $2c$ et $2a$ ne peut être que 2.

Ainsi $\begin{cases} c - a = 2m \\ c + a = 2n \end{cases}$ mais $c^2 - a^2 = 4b'^2 = 4mn$; m et n étant premiers entre eux et devant diviser le carré b'^2 sont eux même des carrés, d'après l'unicité de décomposition en facteurs premiers de b'^2.

$m = p^2$, $n = q^2$, $p^2q^2 = b'^2$ et ainsi $c - a = 2p^2$, $c + a = 2q^2$, $c = p^2 + q^2$, $a)p^2 - q^2$, $b^2 = 4p^2q^2$.

L'imparité de c donne que p et q premiers entre eux, sont en outre de parité différente : la solution générale de $a^2 + b^2 = c^2$ avec a, b, c premiers entre eux dans leur ensemble est : $\boxed{\mathbf{a = (p^2 - q^2)} \;\Big|\; b = 2\varepsilon pq \;\Big|\; \mathbf{c = p^2 + q^2}}$

avec p, q entiers premiers entre eux et de parité différente arbitraires. et ainsi $\boxed{\mathbf{e^{i\theta} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} + i\varepsilon\frac{2pq}{p^2 + q^2}}}$

Raccord C infini

(O 16)

> **Soit f une application $\mathbf{C^\infty}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f(x) = g(x^2)}$. (a) La fonction g est-elle $\mathbf{C^\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$?**
> **(b) La fonction g admet-elle des dérivées à tout ordre en 0 ?**

BIB : outre “contre examples in analysis” : voir Piotr Biler et Alfred Witkoski, Problems in mathematical Analysis Dekker 1990 New york ISBN 0-8247-8312-3 pages 48 (exo 4-209), p 165 qui donne les références : Duke math J. 10 1943 par Hassler Whitney pages 153-158 (préparation) et 159- 172 (article reçu le 28 juillet 1942 présenté à l'American Mathematical Society le 8 septembre 1942) et Th Bröcker et L. Lander Differentiable GERMS and catastrophes Cambridge University Press 1975 (commandé BU 13 3 02) ; ENS Ulm-Sèvres 1980 première composition, corrigé (solution par Arnaudies, et une Bonne solution...) dans RMS octobre 1981 162-172 essentiellement la question III a) et b) ; et enfin un article de Henri Joris Archiv math Vol 39 269-277 0003-889X/82/ 3903-269 \$ 3.30/0 (Birkhäuser Verlag) (1982) reçu de RIDDE Franz 15 octobre 01 qui l'avait retrouvé grâce à ma bib sur ups math “Une application C^∞ non immersive qui possède la propriété universelle des immersions !)

Montrons plus général : si $p \in \mathbb{N}^*$, et si q est la partie entière de $\frac{p}{2}$, alors on peut choisir g de classe C^q (cela prouvera que l'on peut choisir g de classe C^1 pour $p \geq 2$)

Posons $g(x) = f(\sqrt{x})$ pour $x \geq 0$: ce choix est le seul possible.

Préliminaires

Préalablement on a posé $\gamma(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 1 \\ -e^{1/(u-1)(u-2)} & \text{si } 1 < u < 2 \\ 0 & \text{si } u \geq 3 \end{cases}$ fonction raccord de classe infinie, classique. On pose également $C(u) = 1 +_l ambda_i nt_0^u \gamma(t)dt$, om λ est choisi de telle façon que $C(2) = 0$.

Enfin pour tout application $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ on définit l'application $E(\Phi)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$E(\Phi)(u) = \begin{cases} \Phi(u) & \text{si } u \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i C(-2^i u)\Phi(-2^i u) & \text{si } u < 0 \end{cases}.$$

où $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, dont on a préalablement montré l'existence, telle que pour tout entier $p \geq 0$ la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^{ip}$ soit aboslument convergente, de somme $(-1)^p$ (pour démontrer cela on a si N est un entier > 0, on calcule une famille $a_{i,N}$, $0 \leq ui_l eqN$ telle que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} a_{i,N} 2^{ip} = (-1)^p$ pour $0 \leq p \leq N$.

(Nous supposons ces préliminaires, techniques (4 pages et demi dans la RMS) mais “faciles” vérifiés)

Posant alors $\Phi(x) = g(x)$ avec $g(x) = f(\sqrt{x})$ pour $x \geq 0$, on peut étendre la définition de g à $\mathbb{R}$ en posant $g = E(Phi)$ (préliminaires) ; g sera de classe C^q si les conditions des préliminaires sont vérifiée ; Pour $q = 0$, le résultat est immédiat car Φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit donc pour $q \geq 1$, c'est à dire $p \geq 2$. Posons en s'inspirant pour cela de la technique du théorème de DIVISION, $h(x) = \int_0^1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx)dt$, ce qui a un sens car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue.

La dérivation sous le signe $\int$ montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-x) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x) =_{\text{“j'ai rien changé”}} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0) = \int_0^1 \dfrac{\partial}{\partial t}\big[\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx)\big]dt = x\int_0^1 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx) = xh(x)$.

Soit $x > 0$: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x}[f(\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}h(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$.

Comme h est continue sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ se prolonge continûment sur $\mathbb{R}$. Par suite Φ remplit les conditions du préliminaires à l'ordre 1 et le résultat est démontré pour $p = 2..3$.

Supposons, par récurrence que le résultat annoncé soit vrai pour $p - 2 \geq 2$.

Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, on a $h(-x) = h(x)$; h étant de classe C^{p-2}, l'hypothèse de récurrence appliquée à h montre que l'on peut prolonger continûment à $\mathbb{R}$ les dérivées partielles de $h(\sqrt{x})$ jusqu'à l'odre $q-1$ (partie entière de $\frac{p-2}{2}$) ;

Ceci montre que les déivée de $\Phi(x)$ d'ordre inférieur ou égal à q sont prolongeables continûment à $\mathbb{R}$, et que $g = E(\Phi)$ est de classe C^q.

Montrons qu'en un certain sens le nombre $q = [\frac{p}{2}]$ est le meilleur possible : il est facile de voir que si $m < \alpha < m+1$, alors $f(x) = |x|^\alpha$ ($f(0) = 0$) définit une fonction de classe C^m, n'admettant pas de dérivée d'ordre $(m+1)$ en 0 ; $\alpha = 2q + \frac{3}{2}$ montre que f est de classe C^{2q+1} mais que g définie nécéssairement par $g(x) = (x^2)^{q+3/4}$ est de classe C^q mais non C^{q+1} (toutefois il existe des fonctions f de classe C^2, non C^3 telles que g soit C^2 ; exemple $f(x) = |x|^\alpha sin\frac{1}{x^2}$ avec $\alpha = \frac{17}{2}$.

On peut démontrer que si h est impaire de classe C^p avec $p \geq 1$, il existe une fonction continue j de classe C^q avec $q = [\frac{p-1}{2}]$. telle que $h(x) = xj(x^2)$ et que

Il serait intéréssant de trouver un lien avec la formule d'inversion de MÖBIUS par exemple dans Eymard p 97, pour trouver la probabilité pour qu'un nombre soit quadratfrei $f(x) = Q(x^2)$.

Weierstrass “Entier”

(O 18)

Soit f continue sur $\mathbf{I} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, à valeurs réelles, telle que $\mathbf{f(0)}$ soit dans $\mathbb{Z}$. Montrer que sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, f est limite uniforme d'applications polynomiales à COEFFICIENTS ENTIERS.

(Voir aussi Gazette Janvier 2002 page 10)

(Il y a des exercices analogues : numéro 44 RMS juin 99 p 1272-1273 Solution de Moubinool Omarjee (qui doit maintenant faire une thèse ?) le fait dans un segment I inclus dans $]0,1[$; en utilisant $\varphi(x) = 2x(1-x)$ de points fixes 0 et $\frac{1}{2}$: et la suite itérée $q\frac{1}{2^{p-1}}\varphi^n(x)$ $(\forall q \in \mathbb{Z})$ formée de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ converge vers la fonction constante de valeur $\frac{q}{2^p}$.;

Comme l'ensemble des $\frac{q}{2^p}$ est dense dans $\mathbb{R}$ on déduit que toute fonction constante réelle est limite uniforme d'une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

La seconde question donne une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales à coefficients entiers (dans $\mathbb{Z}$) convergeant uniformément vers f. Cela se fait en utilisant Weierstrass "normal" et en jouant sur le fait que les coefficients a_n constants sont limites de polynômes à coefficients entiers d'après la première partie : on compose deux convergence uniformes.

Chambert-Loir Analyse 1 (Masson) page 18 -19 fait exactement le même constat pour une fonction continue à valeurs reélles sur un compact C strictement inclus entre deux entiers consécutifs)

(Solution Chandard Robert 18 mars 2002 :

Je note I l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, et J_a l'ensemble $I\backslash]-a,a[$ On peut se ramener au cas où $f(0) = 0$.

■ PREMIERE IDEE :

Il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f sur I. En posant $Q_n = P_n - P_n(0)$, on obtient une suite de polynômes de valuation ≥ 1 convergeant uniformément vers f sur I.

■ DEUXIEME IDEE :

On construit une suite E_n de polynômes à coefficients entiers vérifiant les propriétés suivantes: E_n converge uniformément vers $\frac{1}{2}$ sur tout J_a Pour tout x de I $|E_n(x)| \leq 1$.

On peut utiliser une suite dérivée de celle suggérée par Vidiani dans son message, mais je préfère celle-ci : $E_n(x) = \frac{1-(1-2x^2)^n}{2}$

De la même manière que chez Vidiani, pour tous q et p la suite de polynômes $q(E_n)^p$ converge uniformément vers la fonction constante $\frac{q}{2^p}$ sur tout ensemble J_a et est majorée sur I par $\frac{q}{2^p}$.

■ SOLUTION DE L' EXERCICE 18

On approche f à epsilon près par un polynôme Q de valuation 1. On écrit $Q = XP$, avec $P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$

On choisit ensuite un réel a tel que $a \sum_{i=0}^{n} |p_i|$ soit majoré sur I par epsilon. Grâce à ce qui précède (deuxième idée), on peut trouver un polynôme R à coefficients entiers tel que :

$|R - P|$ soit majoré sur I_a par epsilon

$|R|$ soit majoré sur I par $\sum_{i=0}^{n} |p_i|$

Alors, XR est un polynôme à coefficients entiers qui approche Q à 2 epsilon près. Ce même polynôme approche f à 3 epsilon près ....

■ PROLONGEMENTS :

Tout ce qui précède s'applique sans modification à tout segment inclus dans l'intervalle ouvert d'extrémités -1 et 1. En améliorant un peu le raisonnement précédent, on peut obtenir le résultat suivant :

Soit f continue sur $[-1,1]$, à valeurs réelles, telle que $f(0), f(1), f(-1)$ soient dans $\mathbb{Z}$ et telle que $f(1) - f(-1)$ soit dans $2\mathbb{Z}$. Alors, f est limite uniforme d'applications polynomiales à coefficients entiers.

Peut-on faire mieux ?

(e-mail ups-math de Chapon le 9 octobre 02) Voilà avec l' aide de mes collègues une solution simple : on suppose $f(0) = 0$ quitte à remplacer f par $f1 : x -> f(x) - f(0)$. a est choisi > 0 pour que f soit assez proche de 0 sur $[-a, a]$; on définit g continue sur $[-1/2, 1/2]$ par $g(x) = f(x)/x^n$ sur $[-1/2, -a] \cup [a, 1/2]$ g affine sur $[-a, a]$.

Il existe P polynome à coefficients réels qui approche uniformément g sur $[-1/2, 1/2]$; alors $x^n * [P]$ approchera uniformément f sur $[-1/2, 1/2]$ avec $[P]$ à coefficients les parties entières de ceux de P .

Avec un peu de soin ...

★ = Off prépa 4

Équivalent de Produit

(O 19)

(a) Soit f une applications continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite (si elle existe) de $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\right)$

(b) Soit (n_i) une suite d'entiers pairs, (μ_i) une suite d'entiers. On suppose que ces deux suites tendent vers plus l'infini. On suppose de plus que $\mu_i \le n_i$ pour tout i et que $\frac{\mu_i-\frac{n_i}{2}}{\sqrt{n_i}}$ a une limite $\lambda>0$. Trouver un équivalent de $C_{n_i}^{\mu_i}$.

(Solution Pinguet 4 mars 02) Voir d'autres points de vue CU et intégrale dans RMS juin 97 p 882 (O96 438) et juin 2000 p 1072 numéro 48 ; et blocs Vuibert p 131 ; O 98 447 ; officiel prépa fev 2002 planche 4 ;)*

f étant bornée sur $[0,1]$, on peut supposer, quitte à prendre n assez grand, que $\forall n\in[[1,n]]$, $1+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})>0$.

$\ln(1+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})+O(\frac{1}{n^2})$ (O à cause de l'uniformité en k (justifier proprement par exemple avec l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ appliquée à $x\mapsto\ln(1+x)$).

Il vient $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}))=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})+O(\frac{1}{n})\to\int_0^1 f$.

Donc $\boxed{\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}))\to e^{\int_0^1 f}}$

Remarque : On peut étendre ce résultat à $f\in\mathbb{C}([0,1],\mathbb{C})$ en utilisant le fait que $\forall(a_k)_{1\le a_k\le p}\in\mathbb{C}^p$, $|e^{a_1+\ldots+a_p}-\prod_{k=1}^{p}(1+a_k)\le e^{|a_1|+\ldots+|a_p|}-\prod_{k=1}^{p}(1+|a_k|)$ (utiliser pour cela $e^{a_1+\ldots+a_p}=e^{a_1}\ldots e^{a_p}=(1+a_1+\frac{a_1^2}{2!}+\ldots.)\ldots(1+a_p+\frac{a_p^2}{2!}+\ldots.))$

(b) $\mu_i=\frac{n_i}{2}+\lambda\sqrt{n_i}+o(\sqrt{n_i})$. Asymptotiquement, $\mu_i>\frac{n_i}{2}$.

$C_{n_i}^{\mu_i}=\frac{n_i(n_i-1)\ldots(n_i-n_i/2+1)\ldots(n_i-\mu_i+1)}{\mu_i(\mu_i-1)\ldots n_i/2\ldots1}=C_{n_i}^{\frac{n_i}{2}}\frac{n_i}{2}(\frac{n_i}{2}-1)\ldots(n_i-\mu_i+1)\mu_i(\mu_i-1)\ldots\frac{n_i}{2}\ldots1=$

$C_{n_i}^{\frac{n_i}{2}}\prod_{k=1}^{\mu_i-\frac{n_i}{2}}\frac{n_i-\mu_i+k}{\frac{n_i}{2}+k}=\frac{n_i!}{(\frac{n_i}{2}!)^2}\prod_{k=1}^{\mu_i-\frac{n_i}{2}}(1+\frac{\frac{n_i}{2}-\mu_i}{\frac{n_i}{2}+k})$.

Posant $A_i=\mu_i-\frac{n_i}{2}=\lambda\sqrt{n_i}+o(\sqrt{n_i}$, on a $n_i=\frac{A_i^2}{\lambda^2}+o(A_i^2)$; et ainsi on a : $C_{n_i}^{\mu_i}=\frac{n_i!}{(\frac{n_i}{2}!)^2}\prod_{k=1}^{A_i}(1-\frac{i}{\frac{A_i^2}{2\lambda^2}+o(A_i^2)+k})$.

Comme $o(A_i^2)$ est indépendant de k et que $k\in[[1,A_i]]$ on a $\ln\left(1-\frac{A_i}{A_i^2/over2\lambda^2+o(A_i^2)+k}\right)=\ln\left(1-\frac{2\lambda_2}{A_i+\frac{2\lambda^2k}{A_i}+o(A_i)}\right)=$ $-\frac{2\lambda^2}{A_i}+o(\frac{1}{A_i})$

Car $\frac{2\lambda^2k}{A_i}$ est borné et rappelons le $o(A_i)$ indépendant de k et $o(\frac{1}{A_i})$ est uniforme par rapport à $k\in[[1;A_i]]$.

Il vient $\prod_{k=1}^{A_i}(1-\frac{A_i}{\frac{A_i^2}{2\lambda^2}+o(A_i^2)+k})=e^{-2\lambda^2+o(1)}\to e^{-2\lambda^2}$ lorsque i tend vers plus l'infini.

D'où $C_{n_i}^{\mu_i}\sim\frac{n_i!}{(n_i/2!)^2}e^{-2\lambda^2}$;

Or d'après la formule de STIRLING $\frac{n_i!}{(n_i/2!)^2}\sim\frac{\sqrt{2\pi n_i}(n_i/e)^{n_i}}{2\pi\frac{n_i}{2}(n_i/2e)^{2\frac{n_i}{2}}}=\frac{2^{n_i+1/2}}{\sqrt{\pi n_i}}$. D'où $\boxed{C_{n_i}^{\mu_i}\sim\frac{2^{n_i+1/2}}{\sqrt{\pi n_i}}e^{-2\lambda^2}}$

(O 25) ★ = Off prépa 4

ED et convexe

Soit y : $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $2y"=(1+y'^2)(y-xy')$, $\lim_{+inфty}y=0$ et $\lim_{0}y'=-\infty$. Montrer que y est convexe et que $y>0$.

On pose $f(x)=y-xy'$; On déduit $\frac{f'}{f}=-(1+y'^2)x$ donc $f(x)=Cexp(-\int_{x_0}^{x}(1+y'^2(t))tdt)$ donc f est de signe constant (celui de la constante C) et $2y"=(1+y'^2)f(x)$ est du signe de f.

Si ce signe (constant rappelons le) était <0 un tableau de variation montre que y' serait décroissant à partir de $y'(+0)=-\infty$ ce qui ne peut convenir. (faire le tableau) ; donc $y"\ge0$ et y est convexe. y' croissante. Si y' était positive dans un voisinage de $+\infty$ un tableau de variation (encore à faire) montrerait que y serait croissance dans ce voisinage y croissante, de limite o devrait âtre négative dans un voisinage de $+\infty$ donc $f(x)=y-xy'$ serait <0 dans un voisinage de $+\infty$ et d'après une équation supra, $y"<0$ dans ce voisinage : y ne serait plus convexe. Donc $y'\le0$ et un tableau de variation montre que y' décroissante est strictement convexe.

---

(33) ★

EF

Déterminer tous les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que : $\mathbf{f(n)+(f\circ f)(n)+(f\circ f\circ f)(n)=3n}$ pour tout n.

Cet exercice se démontre par récurrence $f(0)=0$ et signe de $f(f(n))-f(n)$ est du même type que OIM 1977 exercice 6. *(14 05 02 Moubinool Ormajee me dit que cet exercice est aussi page 280 chapitre 11 ARTHUR ENGERL Problem solving strategies chez Springer)*

(Solution de Serge Varjabedian 12 mars 02)

Soit f une telle application. Nous allons montrer par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $f(n)=n$.

Pour $n=0$, $f(0)+f\circ f(0)+f\circ f\circ f(0)=0$ donc $f(0)=0$.

Soit $n\geq 0$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n.

Par l'absurde si $f(n+1)=a\neq n+1$.

1er cas : $a<n+1$. Dans ce cas $f(a)=a$ par HR et donc $f(n+1)+f\circ f(n+1)+f\circ f\circ f(n+1)=3a<3(n+1)$ impossible.

2ième cas : $a>n+1$. Comme $a+f(a)+f\circ f(a)=3(n+1)$, $f(a)$ ou $f\circ f(a)$ est $<n+1$.
Si $f(a)<n+1$ alors par HR, $f\circ f(a)=f(a)$ et donc
$f(a)+f\circ f(a)+f\circ f\circ f(a)=3a=3f(a)$ si $f(a)=a$
impossible car $a>n+1$.

Si $f\circ f(a)<n+1$ et $f(a)\geq n+1$ alors par HR $f\circ f\circ f(a)=f\circ f(a)$ et donc $f(a)+f\circ f(a)+f\circ f\circ f(a)=3a=f(a)+2f\circ f(a)$ donc $f\circ f(a)=\frac{1}{2}(3a-f(a))$
donc, $f(n+1)+f\circ f(n+1)+f\circ f\circ f(n+1)=a+f(a)+f\circ f(a)=\frac{1}{2}(5a+f(a))>\frac{1}{2}(6(n+1))=3(n+1)$ impossible.

Donc il y a contradiction dans tous les cas, et par suite $f(n+1)=n+1$ ce qui termine la récurrence et prouve que $f=id$. Il est par ailleurs immédiat que id est une solution.

Bilan, id est l'unique solution du problème.

Carré

(O 34)

Déterminer l'ensemble des entiers $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*$ tels que $\mathbf{n^4+2n^3+3n^2+n+1}$ soit le carré d'une entier.

(BIB : une généralisation complète de cet exercice est dans Mordell page 138 ; cet exercice à priori était du style Putnam : mais une recherche putnam square n'a rien donné, non plus que le parcours des tirages des énoncés depuis 1938)

Posons $f(n)=n^4+2n^3+3n^2+n+1=n^2(n+1)^2+2n^2+n+1$; On constate que $n^2(n+1)^2<f(n)<n^2(n+2)^2=n^4+4n^3+4n^2=n^4+2n^3+3n^2+2n^3++n^2$ car $0<2n^3+n^2<n+1$ dès que $n\geq 1$.

Donc $n^2(n+1)^2<p^2<n^2(n+2)^2=n^2(n+1)^2+n^2$; On a $n(n+1)<p<n(n+2)=n(n+1)+n$; on peut donc poser $p=n(n+1)+s$ avec $1\leq s\leq n-1$;

Le report dans l'équation $f(n)=p^2$ laisse après réduction $n+1=2sn(n+1)+s^2=_{\text{“jai rien changé”}}2(s-1+1)n(n+1)+s^2=2n^2+2n+2(s-1)n(n+1)+s^2$ soit $1=n+2(s-1)n(n+1)+s^2$: $s\geq 1$ donne $n=0$ qui est écarté par l'énoncé.

L'équation diophantienne proposée n'a pas de solution.

---

f(AB)=f(BA)

(O 42)

Déterminer les formes linéaires sur $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$ telles que f(AB)=f(BA).

(Voir aussi pour applications linéaires : ronéo factorisation à travers l'application déterminant, mines 86 environ, Leichtnam 73 O2000 226 juin 2001 p 1061)* (il n'est pas plus difficille de le rechercher sur $\mathbb{C}$) On pose $E=M_n(\mathbb{C})$. Considérons l'application $\theta:E\mapsto E*$ (dual de E) définie par $M\mapsto\theta(M)=,\ N\mapsto Tr(MN)$.

Supposons que $\theta(M)=0$; Alors $\forall N\in E,\ TrMN=0$. En appliquant cette égalité aux matrice $E_{i,j}$ de base, on obtient que tous les termes de la matrice M sont nuls : Par conséquent θ est injective ; comme $dim(E)=dim(E*)$ c'est un isomorphisme.

Si f est une forme linéaire répondant au problème posé, il existe une matrice M (unique) telle que pour tout A, $f(A)=Tr(MA)$.

On a alors pour tout couple (A, B) de E^2 : $Tr(MAB) = Tr(MBA)$ d'où $Tr((BM - MB)A) = 0$ ce qui entraine : pour tout $B \in E$ $BM - MB = 0$(puisque θ est injective. M qui commute avec toute matrice B est donc scalaire $M = \lambda I$ et donc $\boxed{\mathbf{f = \lambda Tr}}$

Forêt

(O 70)

Dans l'espace euclidien de dimension 3, on place à tous les points de coordonnées entières sauf l'origine des boules de rayon r > 0. Étudier l'existence d'une droite passant par l'origine ne rencontrant aucune de ces boules.

(Solution Michel Quercia 5 mars 02 19h00) Si une telle droite D existait alors un cylindre plein de révolution d'axe D et de rayon $r' < r$ ne contiendrait aucun autre point entier que l'origine, ce qui est impossible d'après le théorème de Minkowski (une partie de $\mathbb{R}^n$ convexe symétrique par rapport à l'origine et de volume $\geq 2^n$ contient un point entier non trivial).

(BIB : Pierre SAMUEL : théorie algébrique des nombres Hermann 1967 page 67, Libre d'oral Vaugthiers (Eska), Chambadal p 319, APM 291 p 334 et 301 p 869, Berger 3 p 74, Fiche, Agreg 81 rms décembre 81, American Monthly aout septembre 82 page 410,..., Casanova 1 p 100 Belin, site ce mot avec Google, Arnaudies, Polar d'Ehrart p 144)

Voici une idée de démonstration plus proche du programme de taupe : si D existe alors la projection orthogonale de direction D envoie injectivement Z^3 sur un sous-groupe G du plan P orthogonal à D et l'origine est un point isolé de G donc G est discret. Soient u, v, w les projetés des vecteurs de base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Ces vecteurs sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants puisque la restriction de la projection à $\mathbb{Z}^3$ est injective.

Si deux vecteurs sont $\mathbb{R}$-colinéaires, par exemple u et v, alors il existe a irrationnel tel que $v = a.u$ et le sous-groupe de G engendré par u et v est non discret (résultat classique).

Sinon soit T le parallélogramme construit sur u et v. T est compact donc contient un nombre fini d'éléments de G et il existe deux entiers distincts a, b tels que $a.w$ et $b.w$ sont congrus au même point de T modulo le sous-groupe G' engendré par u, v. On obtient ainsi une relation de dépendance linéaire entre u, v et w à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ce qui est absurde.

Remarque : il me semble que ce problème est relié au “paradoxe de la nuit noire” : si les étoiles étaient régulièrement disposées dans l'espace alors la luminosité devrait être la même dans toutes les directions et il ne devrait pas faire nuit sur la face de la terre opposée au soleil.

Oral 93 : RMS février 94 page 454 question 303 (Ulm P).
FORÊT TRANSPARENTE : Un champ circulaire a pour rayon R. Aux points de coordonnées entières de ce champ, sauf en (0,0), on plante des arbres de rayon r ; Évaluer r en fonction de R pour que placé en (0,0), on puisse voir au moins un point placé à l'extérieur de ce champ. *(Foret.tex)*

Si (p,q) est un point de coordonnées entières $(p, q) \neq (0, 0)$ tel que $1 \leq p^2 + q^2 \leq R^2$, on le considère comme le centre d'un cercle de rayon r. Si r est suffisamment petit il existe une demi droite, issue du point (0,0), qui ne rencontre pas les cercles décrits ci dessus (la forêt est transparente) ; de tels rayons peuvent ne pas exister si r est suffisamment grand (pour $r = \frac{1}{2}$ les cercles sont tangents). Posons $r = \rho$ la valeur de r qui sépare les deux cas (limite de transparence). Alors nous avons $\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{R^2+1}}} \leq \rho < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}}}$.

SOLUTION : *(G.Polya : Archiv. Math. Phys. ser. 3, 27, p. 135 (1918))* La démonstration qui suit a été donnée en anglais par A.Speiser, traduite par Vidiani 10 11 95).

Nous dirons qu'un point (p,q) du réseau est PRIMITIF s'il est visible depuis l'origine, c'est à dire si p et q sont premiers entre eux. Si la relation pv-qu=1 est vraie, alors les deux points du réseau (p,q) et (u,v) sont primitifs, et connectés par un parallélogramme d'aire 1 (les deux autres sommets étant (0,0) et (p+u,q+v)) ; Nous appelons (u,v) le voisin de gauche de (p,q), et (p,q) le voisin de droite de (u,v). Nous appelons diagonale de ce parallélogramme de connexion, la diagonale issue de (0,0). Si la longueur de la diagonale de ce parallélogramme est d, alors les points (p, q) et (u, v) sont à la même distance $\frac{1}{d}$ de cette diagonale *(car 1=aire parallélogramme = 2(aires triangles égaux de base la diagonale)= (base)× (hauteur))*. Chaque point primitif du réseau a une infinité de voisins de gauche, ils sont tous sur une même droite et sont en fait également espacés *(d'après BÉZOUT U=u+kp, V=v+kq)*.

(1) (1,0) ET (R-1,1) sont voisins. La diagonale de leur parallélogramme de connexion est de longueur $\sqrt{R^2 + 1}$. Si

cette diagonale prolongée jusqu'à l'infini doit être interceptée par un des cercles de rayon ρ, seuls les cercles de centre (1,0) et (R-1,1) ont à être considérés, d'où $\rho \geq \frac{1}{\sqrt{R^2+1}}$.

POUR TOUT point arbitraire, primitif (p,q) du réseau se trouvant dans le disque $x^2+y^2 \leq R^2$, alors le point voisin (2) de gauche le plus éloigné (p',q') dans le même disque est parfaitement déterminé, c'est à dire (p'+p,q'+q) est déja à l'extérieur du disque $x^2+y^2 \leq R^2$. De la même manière, soit $(p", q")$ le voisin de gauche le plus éloigné de (p', q'), et (p''', q''') celui de $(p", q")$ et ainsi de suite. Après un certain nombre n d'itérations, nous atteignons $(p^{(n)}, q^{(n)})$ avec la propriété que les parallélogrammes raccordant (p, q) et (p', q') puis (p', q') et $(p", q")$,...et $(p^{(n-1)}, q^{(n-1)})$ et $(p^{(n)}, q^{(n)})$, recouvrent complètement le disque unité $x^2+y^2 \leq \mathbf{1}$. Or la diagonale du parallélogramme connectant (p, q) et (p', q') est $> R$, et la distance à cette diagonale des deux points (p, q) et (p', q') est $< \frac{1}{R}$. Par conséquent si nous traçons les cercles de rayon $\frac{1}{R}$ centrés en chacun des points (p, q), (p', q'),....$(p^{(n)}, q^{(n)})$, alors chaque demi droite issue de l'origine est interceptée par l'un des cercles et toutes les diagonales le sont en fait par deux des cercles. Par conséquent $\rho < \frac{1}{R}$.

Un programme en Maple très simple (document joint) permet de tracer les arbres en faisant varier r et R, ce qui permet d'évaluer $\rho(R)$ et de tracer le graphe associé ; $\rho \sim \frac{1}{R}$ au voisinage de $R = +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE RMS février 94 page 454 exercice d'oral 1993 numéro 303 Ulm Paris + O95 334 sol RMS juin 96 p 952 ; Conférence de Langevin 1988 Horizon borné. Polya et Szegô page 151 et 354 ; programme d'informatique Luc Carpentier ; Solution de Lafond (Castel) : fractions continues AMM oct 89 p696-703 ; Programme en Maple Vidiani : b: maple2 95 foret.ms) ; PB APM 319 p 446-449, largeur de route maximum ;

Isométrie T

(O 71)

Dans l'espace euclidien de dimension 3, soit ABCD un tétraèdre régulier. Montrer que le groupe G des isométries affines positives qui laissent stables le tétraèdre est de cardinal 12 et isomorphe au sous-groupe des permutations paires de $\mathbf{S_4}$. ■

Arnaudies, dans groupes, algèbres et gé"ométrie tome 1, Ellipses 1993 page 338 en donne une démonstration qui utilise les théorèmes de SYLOV. Mais cela doit dépasser le niveau du programme.

(Solution de Renaud Palisse 12 03 02)

Le groupe des isométries du tétraèdre régulier agit sur ses sommets ... L'action est fidèle puisque ces 4 points constituent un repère affine, par conséquent ce groupe est isomorphe à un sous-groupe G de S_4 ... Il y a l'identité, les 8 rotations d'axe passant par un sommet et le milieu de la face opposée, les 3 demi-tours d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées ; ces 12 isométries positives correspondent aux 12 permutations paires de S_4 ... Mais il me semble par ailleurs que la réflexion par rapport à un plan passant par une arête et le milieu de l'arête opposée fournit une transposition... Ainsi, le groupe en question serait plutôt isomorphe à S_4 , non ?

(Solution de Christian Devanz 12 mars 02)

Les 3-cycles donnent les 8 rotations et les 3 "doubles transpositions" donnent les retournements d'axe reliant les milieux de segments opposés. D'ailleurs la description de l'isomorphisme est ici très simple car la permutation (paire) associée à f rotation conservant T n'est autre que la restriction de f à $\{A, B, C, D\}$.

Une réminiscence : "Le groupe des isométries du simplexe en dimension n est isomorphe à S_n" C'est plus difficile à "voir", mais je crois que c'est quand même vrai...

(Solution de Pierre Gissot 12 mars 2002)

Je pense que l'on peut utiliser les notions d'éléments générateurs. Avant de partir au travail, il faut bien vivre une idée ou deux pour la preuve

On peut montrer que le groupe des isométries du tétraèdre est isomorphe au groupe des permutations, en exhibant l'application qui à toute isométrie laissant invariante le tétraèdre (A, B, C, D) associe la permutation $(A->f(A), B->f(B), C->f(C), D->f(D))$. Ce morphisme de groupe est clairement injectif (classique) et surjectif, car toute transposition a au moins un antécédent. La transposition $(A<->B)$ ayant pour antecedent la reflexion de plan (C, D, I) où I est le milieu de (A, B). Si l'on s'interesse à la rotation d'axe AG ou G est le centre de gravité de la face (BCD) et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, son image par l'isomorphisme construit précédemment est un cycle d'ordre trois. On peut ainsi construire les antécedents de tous les cycles d'ordre trois du groupe des permutations de quatre éléments. Or, nous savons que les cycles d'ordre trois engendrent le sous groupe des permutations paires. il y a au moins 12 isométries positives conservant le tétraèdre. C'est ensuite je crois assez direct de montrer que l'on a la les isométries positives du tétraèdre L'image réciproque du sous groupe des permutations paire n'est alors qu'un sous groupe du groupe des isométries conservant globalement le tétraèdre.

(Solution Chardard Robert 13 mars 02)

Notons $T = ABCD$ le tétraèdre régulier. On considère l'application qui à tout élément g de $O(T)$ associe sa restriction à $\{A, B, C, D\}$. C'est évidemment un homomorphisme. Il est injectif puisque $ABCD$ est un repère affine de l'espace. Il reste à démontrer qu'il est surjectif. Pour cela, il suffit de démontrer que toute transposition de $\{A, B, C, D\}$ correspond à un élément de $O(T)$. C'est bien le cas puisque par exemple, à la transposition échangeant A et B, correspond la réflexion par rapport au plan médiateur de AB. La fin de l'exercice est facile puisque, à chaque transposition, correspond une isométrie négative de l'espace ...

(Solution (très) détaillée de Gozard 13 mars 02 :) On pose $G' = \{f \in Iso(E_3) | f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}\}$ est un sous groupe de $Iso(E_3)$: c'est du cours.

Remarquons que si $f \in G'$, comme f est bijective (car isométrie affine) la restriction et corestriction de f à $\{A, B, C, D\}$ est une permutation de cet ensemble. Notons la $\widetilde{f}$.

L'application $\theta : G' \longrightarrow \sigma(\{A, B, C, D\}) \simeq \sigma_4$ telle que $\theta(f) = \widetilde{f}$ est clairement un homomorphisme de groupes.

• : θ est injectif car si $f \in Ker(\theta)$ soit $\widetilde{f} = id$, alors $(f(A), f(B), f(C), f(D)) = (A, B, C, D)$, donc $\forall M \in E_3$, $f(M) = M$, et $f = id$. (Écrire M comme barycentre de (A, B, C, D) et utiliser le fait que f conserve le barycentre : si $M = Bar((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta))$ alors $f(M) = Bar((f(A), \alpha), (f(B), \beta), (f(C), \gamma), (f(D), \delta))$ donc $f(M) = Bar((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta)) = M$)

θ est surjectif : comme les transpositions engendrent σ_4, il suffit d'exhiber un antécédent par θ de chaque transposition.

Or si $X \neq Y$ appartiennent à $\{A, B, C, D\}$, la transposition (X, Y) est l'image par θ de la réflexion par rapport au plan médiateur de $[X, Y]$ (auquel appartiennent les deux autres points de $\{A, B, C, D\}$, puisque le tétraèdre est régulier).

À ce stade $G' \simeq \sigma_4$.

$\alpha : G' \to \{\pm 1\}$ telle que $\alpha(f) = det(\overrightarrow{f})$ et la signature $\varepsilon : \sigma_4 \to \{\pm 1\}$ sont deux morphismes de groupes, donc $\beta = \alpha \circ \theta^{-1} : \sigma_4 \to \{\pm 1\}$ est aussi un morphisme de groupes.

Si $t \in \sigma_4$ est une transposition, $\theta^{-1}(t)$ est une réflexion (vu) donc $\beta(t) = \alpha(\theta^{-1}(t)) = -1 = \varepsilon(t)$.

Par conséquent β et ε coïncident sur l'ensemble des transpositions, partie génératrice de σ_4, dont sont égales.

Par conséquent : $G = \{f \in Iso^+(E_3) | f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\}\}$ est égal à $\theta^{-1}(A_4)$. [où A_4 est le groupe des permutations paires de σ_4]. D'où la conclusion voulue : G est isomorphe à A_4 par $\theta\big\backslash^{A_4}_{/G}$.

REMARQUE : petit complément non demandé par l'énoncé. A_4 est formé de id, trois "bitranspositions" (de type $(XY) \circ (ZT)$ où $\{X, Y, Z, T\} = \{A, B, C, D\}$) et 8 cycles de longueur 3.

On saura tout sur θ lorsqu'on aura précisé que :

☐ Si c est un 3-cycle, $c = (X, Y, Z)$, alors $\theta^{-1}(c)$ est la rotation d'axe porté par la doite passant par l'autre point (l'élément de $\{A, B, C, D\} \setminus \{X, Y, Z\}$) et l'isobarycentre de $\{X, Y, Z\}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$ selon l'orientation choisie.

☐ Si b est une "bitransposition", $b = (X, Y) \circ (Z, T)$ alors $\theta^{-1}(b)$ est le demi-tour d'axe (milieu de $[X, Y]$, milieu de $[Z, T]$) ainsi

G est constitué de :	**id**	**d'ordre =1**
	4 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$	**d'ordre =3**
	4 rotations d'angle $-\frac{2\pi}{3}$	**d'ordre =3**
	3 demi-tours(= rotations d'angle π**)**	**d'ordre =2**

Minkowski

(O 72)

Soit $\mathbf{R} = \mathbb{Z}^n$ **et** $\mathbf{D}(\mathbf{R}) = [\mathbf{0}, \mathbf{1}[^n$. **Soit** $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ **convexe, symétrique par rapport à O, borné, de mesure** $\mathbf{p}(\mathbf{A}) > \mathbf{2}^n$. **Montrer que** $|\mathbf{A} \cap \mathbf{R}| \geq \mathbf{2}$.

C'est le fameux lemme de Minkowski, dont voisi une brève bibliographie : *(BIB : Il se trouve aussi dans les travaux d'Ehrart (Strasbourg Irma) Pierre SAMUEL : théorie algébrique des nombres Hermann 1967 page 67, Livre d'oral Vaugthiers (Eska), Chambadal p 319, APM 291 et 301, Berger 3 p 74, Fiche, Agreg 81 rms décembre 81, American Monthly aout septembre 82 page 410-460,...)*

Voici une démontration simple dans le cas $n = 2$: Enoncé : Soit un ovale d'aire S, qui a un centre de symétrie entier O. Si $S > 4$, le point O n'est pas le seul point entier interne de l'ovale.. Démonstration : L'homothétie $H(0, \frac{1}{2})$ transforme l'ovale F en F' d'aire $\frac{S}{4} > 1$. D'après le théorème de BLICHFELD, il y a donc dans F' un vecteur AB de composantes entières a, b qui correspond à un vecteur $A'B'$ de F de composantes $2a, 2b$. Le vecteur $OM = \frac{A'B'}{2}$ a donc pour composantes a, b. Le point M est donc entier et il est intérieur à F comme milieu de $[B'A"]$ où $A"$ désigne le symétrique de A' par rapport à O. Remarques : La limite 4 est stricte (voir le carré de centre O parallèle aux axes de coté 2.; il se généralise à n dimension comme le th de Blichfeld ; Il s'étend par le théorème d'EHrart ; (CR académie des sciences t 240 p 483-485 février 1955) Soit un ovale d'aire S dont le centre de gravité G est entier. Si $S > 4,5$ le point G n'est pas le seul point entier interne de l'ovale.

Th de Blichfeld : Soit un domaine d'aire S, morcelé ou non. Si $S > 1$, il existe un vecteur entier dont les extrémités appartiennent au domaine. Dem :Par des translations de vecteur entiers, applicons dans un même carré C

tous les carrés qui empiètent sur de domaine D. L'aire de C étant inférieure à celle de D, deux parties de D au moins empièteront l'une sur l'autre après ces translations. Un point A de cet empiètement provient pour la première de ces parties d'un point A' d'un carré C', pour la seconde d'un point A" d'un carré C" différent de C' (faire une figure dans le réseau) ; Le vecteur $A'A$" dont les extrémités appartiennent bien à D, est entier puisque $A'A$ et $A"A$ le sont .

Pour une généralisation il y a une preuve dans Minkowski : Geometroe der Zahlen 1896.

Il y a aussi une preuve par Hâjos (Hua Loo Kang Introduction to number theory Springer

---

On appele D le parallèlotope semi-ouvert construit sur $e = (e_1, ..., e_n)$ $\mathbb{Z}-$base du réseau R. A est la réunion des $A \cap_{h\in R} (h + D)$. Comme A est par hypotèse mesurable : $\mu(A) = \sum_{h\in R} \mu(A \cap (h + D)$.

Comme la mesure m est invariante par translation $\mu(A \cap (h + D) = \mu(-h + A) \cap D$. *(On ramène tout dans le parrallèlotope de base).*

Or les ensembles $(-h+A)\cap D$, $h \in R$ ne peuvent être deux à deux disjoints car, sinon $\mu(D) \geq \sum_{h_i n R} \mu(((-h+A)\cap D)$, contrairement à $\mu(A) = \sum_{h\in R} \mu(A \cap (h + D)$ et l'hypothèse $\mu(D) = valuation(R) < \mu(A)$.

Il existe donc deux éléments distincts h et h' du réseau R tels que $D \cap (-h + A) \cup (-h' + A) \neq \emptyset$. On a donc deux éléments x, y de A tels que $-h + x = -h' + y$ d'où $x - y = h - h' \in R$, et $x \neq y$ car $h \neq h'$.

-Faddeev

(O 79)

Soit $\mathbf{P(X)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_k X^k}$ un polynôme de $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$. Soit $\mathbf{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}$ $(|\mathbf{z}| \leq \mathbf{1} \Rightarrow |\mathbf{P(z)}| \leq \mathbf{M}$; Montrer que $|\mathbf{a_k}| \leq \mathbf{M}$ pour tout k.

(Ce exercice a été posé par Carpentier dans les exercices sup-spé (ronéo 89) que nous donnons aux élèves de sup vers spé pour qu'ils s'entraînent pendant les vacances. Le premier DS comporte 20 de ces exos ; TP 0 p 8 ; DS1 2001 num 15 ; Faddeev Mir p 115 ; Xp' 80 , enset 81 ; Gantmacher 2 p 82 AMM juin 83 ; br 81 p 200-202 pour analogies ; O 98 Tex)

Il faut se souvenir du résultat utile : si $z_0..., z_n$ sont les racines $n + 1$ i-ème de 1, avec $z_k = e^{\frac{21k\pi}{n+1}}$ on a $z_k = z_1^k$ et $S_p = (z_0)^p + ... + (z_n)^p$ est une progression géométrique de raison z_1^p ; Si $p \equiv 0$ $modulo(n + 1)$ alors $S_p = n + 1$, sinon d'après les formules de progression $S_p = \frac{(z_1)^{p(n+1)}-1}{z_1-1} = 0$ (car $(z_1)^{p(n+1)} = [(z_1)^{n+1}]^p = 1^p = 1$ (⚠**car p est ENTIER**).

On a $|P(z_0) + ...P(z_n)| \leq |P(z_0)| + ...|P(z_n) \leq (n + 1)M$; Mais d'après ce qui précède $P(z_0) + ...P(z_n) = a_0(n + 1) + a_1S_1 + ... + a_nS_n = (n + 1)a_0$ donc $|a_0| \leq M$.

Pour avoir les autres inégalités on applique la même méthode, pour décaler la somme non nulle; à $z^nP(z), ...zP(z)$; les coefficients sont les mêmes et par exemple pour le premier emploi on a $|a_1| \leq M$.

- à nilpotente

(O 83)

Soit $\mathbf{M} \in \mathbf{M_n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{rg(M)} < \mathbf{n}$. Montrer que M est équivalente à une matrice nilpotente.

(Solution Gozard 7 mars 02) Notons $r = rg(M)$; si $r = 0$, $M = 0$ est nilpotente ; Supposons $r \in [[1, n - 1]]$; on sait que deux matrices de même rang sont équivalentes ; donc $M \sim (0, e_1, e_2, ...e_{n-1})$ (matrice dont les colonnes sont) ; qui est triangulaire de Jordan à diagonale nulle donc nilpotente.

(O 89) BLOCS

(a) Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M_2(R)}$ diagonalisable et $\mathbf{P} \in \mathbf{M_n}(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} aP & bP \\ cP & dP \end{pmatrix} \in \mathbf{M_{2n}(R)}$ est diagonalisable.

(b) Même question en remplaçant "diagonalisable" par "inversible".

(Voici le genre d'exercice, avec (Laplace) qui avec ses variantes et choix de matrices particulières d'une part est une provocation au bachotage d'autre part ne fatigue pas l'examinateur, puisqu'il suffit de changer les paramètres pour avoir à chaque fois un exercice différent,...avec le même style de démonstration : c'est donc le genre d'exercice qu'il faut éradiquer, sous ses formes particulières)

(BIB -non exhaustive) : Leboeuf 147 ; Blocs 74-77 ; Tauvel 59 ; GC ; TP MP1 ; Rms juin 95 p 735, Leichtnam 148 ; dans la rms mai 01 p 1038 Reisneir utilise ce produit tensoriel de matrices pour résoudre l'exercice 148 (du type "Lie")

On généralise une bonne fois pour toute l'énoncé : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_p(\mathbb{C})$ On pose $A * B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & ... & a_{1,n}B \\ ...... & ... & .... \\ a_{n,1}B & ... & a_{n,n}B \end{bmatrix} \in M_{n+p}(\mathbb{C})$

Par Produit ligne de blocs par colonne de blocs on vérifie que $A * B)(A' * B') = (AA') * (BB')$.

Si A et B sont inversibles, on vérifie de même que $(A * B)$ est inversible d'inverse $A^{-1} * B^{-1}$.

Appelons λ_i les valeurs propres de A et μ_j celles de B.

Si A et B sont trigonalisables (diagonalisables), il existe S et T triangulaires supérieures (diagonales) et P et Q inversibles (de dimensiosn respectives n et p) telles que $A = PSP^{-1}$ et $B = QTQ^{-1}$.

Alors $A*B = (PSP^{-1})*(QTQ^{-1}) = (P*Q)(SP^{-1}*TQ^{-1}) = (P*Q)(S*T)(P^{-1}*Q^{-1}) = (P*Q)(S*T)(P*Q)^{-1}$.

$A * B$ est donc semblable à $S * T$ qui est triangulaire (diagonale) supérieure par blocs, avec pour blocs diagonaux $\lambda_1 T, \lambda_2 T, ..., \lambda_n T$ eux même triangulaires (diagonaux) ; $S * T$ est donc triangulaire supérieure (diagonale) avec pour éléments diagonaux : $\lambda_1\mu_1, ..., \lambda_1\mu_p, \lambda_2\mu_1, ..., \lambda_2\mu_p, ..., \lambda_n\mu_1, ..., \lambda_n\mu_p$.

On a donc $\boxed{\mathbf{PC(A * B)(X)} = \prod_{\mathbf{i=1..n,j=1..p}} (\lambda_\mathbf{i}\mu_\mathbf{j} - \mathbf{X})}$

Ce résultat peut être considéré comme un "super-résultant" permettant de former le polynôme ayant pour racines les produits des racines de deux polynômes donnés !

Pour la diagonalisabilité on pourrait trouver un lien entre les polynômes minimaux de A et B.

Les calculs précédent, prouvent sans peine que $Tr(A * B) = Tr(A)Tr(B)$ et que $det(A * B) = (det(A))^p(det(B))^n$;

Pour des vecteurs propres : si x est une colonne de $\mathbb{C}^n$ et y une colonne de $\mathbb{C}^p$ alors $x * y$ est une colonne de $\mathbb{C}^{n+p}$ et on vérifie immédiatement que si ce sont des vecteurs propres respectifs (notations évidentes) de A et B, alors $(A * B)(x * y) = (Ax) * (By) = (\lambda x) * (\mu y) = \lambda_m u(x * y)$ $x * y$ est $\lambda\mu$ propre pour $A * B$.

Diagonaux =

(O 91)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{M_n}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe O orthogonale telle que ^{t}OAO ait tous ses éléments diagonaux égaux.

(Solution Pinguet 8 mars 02)

Qitte à remplace M par $M - \frac{TrM}{n} I_n$, on peut supposer que $TrM = 0$, ce que l'on fait désormais.

■ Si $M = 0$ le résultat est clair.

■ Sinon, en notant $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique (orthonormale) de $\mathbb{R}^n$ on a $\sum_{i=1}^{n} (u(e_i)|e_i) = trM = 0$ ($u \in L(\mathbb{R}^n)$ désignant l'endomorphisme canoniquement associé à M).

Montrons : $\exists x \in S(0, 1), u(x)|x) = 0$.

- S'il existe $i \in [[1, n]]$ tel que $(u(e_i)|e_i) = 0$, le résultat est clair.
- Sinon, il existe $(i_0, i_1) \in [[1, n]]^2$, $i_0 \neq i_1$ tel que $(u(e_{i_0})|e_{i_0}) < 0$ et $(u(e_{i_1})|e_{i_1}) > 0$ car par connexité de $S(0, 1)$ (car $n \geq 2$!) et continuité de l'application de $S(0, 1)$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $(u(x)|x)$, il vient $\exists x_0 \in S(0, 1)$, $(u(x_0)|x_0) = 0$.

Ainsi $\exists x_0 \in S(0, 1)$, $(x_0|u(x_0)) = 0$. On complète alors la famille $\left(x_0, \frac{u(x_0)}{||u(x_0)||}\right)$ *(si $u(x_0) \neq 0$, sinon seulement (x_0))* en une base orthonormale (e') de $\mathbb{R}^n$: $e' = (x_{0,u} nderbracee'_{2=u(x_0)/||u(x_0)|| \ si \ u(x_0) \neq 0}, e'_3, ..., e'n)$.

La matrice de u sur cette base e' est alors de la forme $Mat_{e'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & ... & * \\ * & * & ... & * \\ 0 & * & ... & * \\ \vdots & * & ... & * \\ 0 & * & ... & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & ... & * \\ S & N & & \end{pmatrix}$ (*)

On pose $F = Vect(e'_2, ..., e'_n) = (\mathbb{R}x_0)^\perp$.

Notant p le projecteur orthogonal sur F on a $Mat(p \circ u_{|F} = N$;

Comme par hypothèse de récurrence, $Tr(u_N) = Tr(N) = 0$ (par (*) puisque $Tr(M) = 0$, il existe $(e"_2, ..., e"_n)$ base orthonormée de F telle que $Mat_{(e"_2,...,e"n)}u_N = N'$ de diagonale nulle.

On pose alors $e" = (x_0, e"_2, ..., e"n)$, base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

On a alors $Mat_{e"}u_M = \begin{pmatrix} 0 & * & ... & * \\ S & N'cr & & \end{pmatrix}$ qui est de diagonale nulle.

Donc il existe une matrice ortho-semblable à M qui soit de diagonale nulle.

★

(O 93) Inégalité Pappus OL75

Soient $\mathbf{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n}$ avec $\mathbf{x_1 \geq x_2 \geq, ..., \geq x_n}$, et $\mathbf{y_1 \geq y_2 \geq, ... \geq y_n}$. Soit $\mathbf{z_1, ..., z_n}$ une permutation de $\mathbf{y_1, ..., y_n}$. Montrer que : $\mathbf{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}$.

Wirth et Patte disent respectivement qu'il y a des inégalités analoges (déduires de det(I+AB) dans Ulm P' 1976 et ENTPE 2ème 1992)

(Roger Dallard m'indique par message élestronique du 4 avril que cet exercice est le sujet numéro 1 des Olympiades internationales 1975 posé à Burgas en Bulgarie, la solution proposée page 73-75 du Livre de D GERLL et G Girard "les olympiades internationales de mathématique" classiques Hachette 1976 collection Feu vert série RAS , se fait par récurrence analogue à celle proposée ci-dessous par Gozard)

(Solution Gozard : 25 mars 02)

On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ l'inégalité proposée est évidente : il y a égalité.

Pour $n = 2$, on fait le calcul : $(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 = 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$.

Supposons (hypothèse de récurrence) l'inégalité vraie jusqu'au rang $n - 1$.

Deux cas se présententent :

• Premier cas $z_n = y_n$.

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)^2 \geq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

• • Second cas $z_p = y_n$ avec $p \neq n$. On note $z_n = y_q$.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = (x_p - y_n)^2 + (x_n - y_q)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n-1}(x_i - z_i)^2 - (x_p - y_p)^2 - (x_n - y_n)^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n-1}(x_i - y_i)^2$$

Or d'après la propriété pour **n=2**, on a : $(x_p - y_n)^2 + (x_n - y_q)^2 \geq (x_p - y_q)^2 + (x_n - y_n)^2$.

Donc $\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \geq (x_p - y_q)^2 + (x_n - y_n)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n-1}(x_i - z_i)^2 - (x_p - y_p)^2 - (x_n - y_n)^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n-1}(x_i - y_i)^2 =$

$\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - z'_i)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)^2$.

où $\begin{cases} z'_i = z_i & \text{pour } i \neq p \\ z'_p = z_q \end{cases}$.

Donc $(z'_1, ...?z'_{n-1})$ est une permutation de $(y_1, ...?y_{n-1})$, donc (cas précédent) $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - z'_i)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - y_i)^2 \geq 0$.

La propriété demandée est vraie pour tout n.

Comme interprétation géometrique on peut dire que la permutation identité pour les y_i bien ordonnés, mimise $\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$.

(Interprétation et généralisation par Romain Krust 27 03 02)

Il est immédiat que cette inégalité équivaut à :

$x_1z_1 + x_2z_2 + ... + x_nz_n \leq x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$

Quitte à ajouter une même valeur à tous les x_i, on peut supposer que leur somme vaut 1. On a alors une interprétation barycentrique simple : En mettant les poids importants sur les grandes valeurs des y_i, le barycentre est plus grand. Cette inégalité n'est donc pas sans faire penser à celle de TCHEBYCHEFF (que je rappelle ci-dessous).

On en a une preuve en appliquant le procédé récursif suivant : On considère la somme $S = x_1z_1 + x_2z_2 + ... + x_nz_n$. S'il existe $i < j$ tels que $z_j < z_i$, on échange z_i et z_j, ce qui ne peut qu'augmenter S. Lorsque le procédé s'arrête, S vaut $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$.

Inégalité de TCHEBYCHEFF

Si $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ et $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$ alors
$(x_1 + x_2 + ... + x_n)(y_1 + y_2 + ... + y_n) \leq n(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)$

Là aussi, on peut se ramener à $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, et l'interprétation barycentrique (intuitive mais moins triviale que la précédente) est : L'isobarycentre des y_i est majoré par le barycentre des y_i pondérés par les x_i.

On peut l'établir par un procédé semblable à celui décrit ci-dessus, quoiqu'un peu plus pénible. Mais une jolie preuve (que je dois à un élève de sup) est obtenue en écrivant que $\sum_{i,j}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \geq 0$

★ U d'intervalles

(O 94)

Montrer que l'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}\ ;\ \sum_{k=1}^{70} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}-\mathbf{k}} \geq \frac{5}{4}\}$ est une réunion finie d'intervalles disjoints. Calculer la somme de leurs longueurs. ■

(Cet exercice est généralisé, avec en plus le lien avec une intégrale dans Bréal 1989 p 58-59, ainsi que dans blocs p 31-32) Solution Maple (Vidiani) : On trace le graphe de f : $f := x- > sum(k/(x-k), k = 1..70);$

$F := plot(f(x), x = 0..71, y = -5..5, color = red, title = \text{‘}O01 - 94\text{‘}) : H := plot(5/4, x = 0..71, y = -5..5, color = black) : with(plots) : display(F, H);$

Enfin la sommation au moyen de “ROOT OF”, donne le résultat attendu en 6.088 secondes (sur pentium 400) ;

$st := time() : Olympiade1988 := sum('u', 'u' = RootOf(f(x) = 5/4)) - sum(k, k = 1..70); chrono\_exo\_94 := (time() - st) * seconde(s);$

C'est la solution d'Ivan Gozard, reproduite ci-après, qui “comme la madeleine de Proust” m'a mis sur la voie : le 1988 était forcément volontaire et c'est bien le cas : Cet exercice est l'énoncé 4 des **OIM 1988**. *Voir pour cela le livre OIM énoncés et solutions années 1988-1997, par Jean-Pierre Boudine, François Lo Jacomo, Roger Cuculière, aux éditions du choix “Heuristik Park”, Novembre 1998 ISBN 2-909028-26-7 120 F que je vous recommande ! Voici la solution de cet ouvrage, reproduite ci après :*

Une inégalité du style $f(x) \geq u$, f étant continue et dérivable (sauf en quelques points, au nombre ici de 70...) se traite en regardant son sens de variation et ses limites. Ici la situation est assez simple, malgré les apparences. Le fait *à priori* assez stupéfiant que les inventeurs du problème aient réussi à caser (prouesse dont ils sont familiers, humour traditionnel) le millésime de l'année du concours dans un tel exercice ne doit pas nous ébahir plus que ça...

La fonction f définie par $f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}$, est décroissante sur les 71 intervalles où elle est définie,

$]-\infty, 1[,]1, 2[, ...,]69, 70[,]70, +\infty[$, comme le montre le signe de sa dérivée.

À l'infini, la fonction tend vers zéro, tant à gauche qu'à droite. Un chaque point de discontinuité, un et un seul des termes de cettte somme tend vers l'infini et donc aussi la somme. Il s'agit toujours de moins l'infini à gauche et de plus l'infini à droite.

La somme en question sera égale à $\frac{5}{4}$, du fait du théorème des valeurs intermédiaires, exactement 70 fois. Une fois entre 1 et 2, une fois entre 2 et 3, et la dernière fois après 70. Si on note a_p la racine située entre les entiers p et $p+1$ pour $1 \leq p \leq 69$ et a_{70} la racine dans $]70, +\infty[$, les intervalles sur lesquels l'inégalité demandée est vérifiée sont les intervalles $]p, a_p[$, de longueur $a_p - p$.

Nous devons donc montrer que $a_1 - 1 + a_2 - 2 + ... + a_{70} - 70 = 1988$. Comme nous savons que $1 + 2 + ... + 70 = \frac{70*71}{2} = 35 * 71 = 2485$, il nous faut donc calculer la somme des racines et montrer qu'elle vaut $\boxed{\mathbf{4473}}$

Explicitons l'équation :

Notons $P_{(x-u)}$ le produit de tous les termes depuis $(x-1)$ jusqu'à $(x-70)$ à la seule exception de $(x-u)$.

Ainsi $P_{(x-1)} = (x-2)(x-3)...(x-70)$, etc.

Nous sommes ramenés à chercher la somme des racines de l'équation : $\sum_{k=1}^{k=70} kP_{(x-k)} = \frac{5}{4}(x-1)(x-2)...(x-70)$.

Le membre d'extrême droite est de degré 70 et le coefficient de x^{70} est $\frac{5}{4}$, celui de x^{69} est $\frac{5}{4}$ “fois” la somme des entiers de 1 à 70 (= 2485), avec un signe moins. À gauche on a un degré 69. Le coefficient de x^{69} est encore la somme de ces entiers, 2485 avec un signe plus. Faisant “tout passer à droite”, on trouve un coefficient de x^{69} égal à $-\frac{9}{4}.2485$.

La somme des racines d'un polynôme, vaut $-\frac{b}{a}$, où a est le coefficient du terme de degré le plus élevé et b celui du terme de degré juste inférieur. Ici on trouve $\frac{9}{4}.\frac{4}{5}.2485 = 4473$.

À la réflexion, le résultat precédent peut surprendre... Nous faisons la somme de 70 intervalles, et 69 d'entre eux sont situés entre deux entiers consécutifs, leur somme ne soit pas dépasser 69, et elle est plus probablement très inférieure. Cela veut dire que la plus grande valeur pour laquelle cette somme est égale à $\frac{5}{4}$ est grande ! Effectivement, en cherchant avec un logiciel quelconque, on trouve que cette racine est très légèrement supérieure à 2035. Le dernier intervalle a donc pour longueur $2035 - 70$, soit 1965 (à très peu près), ce qui laisse 23 comme somme des 69 autres.

Cet exercice peut-il resservir en 2035 ?

(statistiques pour cet exercice : international 25 pour cent on eut $7/7$*, 52 pour cent on eu* 0*, moyenne* $2,3$ *tandis que pour les 6 memebres de la délégation française 2 sur 6 on eut* $7/7$*, un a eu* $0/7$ *la moyenne se situant à* $3,8$*).*

(Solution Gozard 23 03 02)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \sum_{k=1}^{70} \frac{k\prod_{i=1,i\neq k}^{70}(x-i)}{\prod_{j=1}^{70}(x-j)} = \frac{\sum_{k=1}^{70} k\prod_{i=1,i\neq k}^{70}(x-i)}{\prod_{j=1}^{70}(x-j)} = \frac{P(x)}{\prod_{j=1}^{70}(x-j)}$$ où P est un polynôme de degré 69. $P(x) = \sum_{k=1}^{70} k \prod_{i=1,i\neq k}^{70} (x-i)$.

f est C^∞ sur chaque intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash[[1,70]]$ et $f'(x) = -\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{(x-k)^2} < 0$, donc f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles, et le tableau de variation est comme suit :

x	$-\infty$	1	$2 \ldots\ldots j$	$j+1 \ldots\ldots 70$	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$ ‖	$+\infty \searrow -\infty$ ‖	$-\infty$ ‖ $+\infty \searrow -\infty$ ‖	‖ $+\infty$ ‖	$+\infty \searrow 0$

$\Delta = \{x \in \mathbb{R}\backslash[[1,70]] | f(x) \geq \frac{5}{4}\}$ est donc la réunion de 70 intervalles disjoints $]1, x_1],]2, x_2], \ldots,]69, x_{69}],]70, x_{70}]$, où pour chaque $k \in [[1,69]]$, x_k est l'élément de $]k, k+1[$ tel que $f(x_k) = \frac{5}{4}$ (il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il est unique par décroissance stricte), et x_{70} est l'élément de $]70, +\infty[$ vérifiant $f(x_{70}) = \frac{5}{4}$.

La somme des longueurs cherchées est $\sum_{k=1}^{70}(x_k - k) = \sum_{k=1}^{70} x_k - \frac{70.71}{2}$;

Par ailleurs : $f(x) = \frac{5}{4} \Longleftrightarrow P(x) = \frac{4}{4}\prod_{j=1}^{70}(x-j) \Longleftrightarrow 5\prod_{j=1}^{70}(x-j) - 4P(x) = 0$.

Notons $R(x) = 5\prod_{j=1}^{70}(x-j) - 4P(x)$ ce dernier polynôme, de degré 70, de coefficient dominant 5. Il a 70 racines : les x_k. Il s'écrit donc $R(x) = 5\prod_{k=1}^{70}(x - x_k) = 5[x^{70} - \sum_{k=1}^{70} x_k x^{69} + M(x)]$ où $deg(M(x) \leq 68$ (relation entre coefficients et racines d'un polynôme scindé...).

Donc $\sum_{k=1}^{70} x_k = -\frac{1}{5} *$ coefficient de degré 69 de R.

Comme $R(x) = 5\prod_{j=1}^{70}(x-j) - 4P(x)$, et $deg(P) = 69$, il vient : $\sum_{k=1}^{70} x_k = -$(coefficient de degré 69 de $\prod_{j=1}^{70}(x-j)$) $+\frac{4}{5}$(coefficient dominant de P)$= \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}(x_k) -$ [coefficient de degré 69 de $\prod_{j=1}^{70}(x-j)$].

Or (encore les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé) $\prod_{j=1}^{70}(x-j) = x^{70} - \prod_{j=1}^{70} jx^{69} +$(machin de degré $\leq \underbrace{68}$).

Plaira à Vidiani (*)

((*) écrit Gozard)

Donc $\sum_{k=1}^{70} x_k = \frac{9}{6}\sum_{j=1}^{70} j$.

Finalement la longueur voulue est :

$\sum_{k=1}^{70}(x_k - k) = \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} k = \frac{4}{5}\frac{70*71}{2} = 28*71 =$ **1988**... et cet exercice a été posé avec 13 ans de retard !

★ - EF

(O 95)

Trouver f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2}$.

(Solution Gozard 8 03 02) voir aussi la solution photocopiée jointe des Olympiades internationales 1992 (et PUTNAM ?), second exercice qui fait l'étude sans hypothèse de continuité.)

Notons (E) la condition : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$.

– Soit $y \in \mathbb{R}$.

Supposons $y > f(y)$. Alors posant $x = \sqrt{y - f(y)}$ on a $y = x^2 + f(y)$, donc $f(y) = f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$, donc $f(y) \geqslant y$; ce qui est contradictoire...

Ainsi : **(I)** $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \geqslant y$.

– Soit $x \in \mathbb{R}$.

(I) entraîne : $\forall y \in \mathbb{R},\ y + (f(x))^2 = f(x^2 + f(y)) \geqslant x^2 + f(y) \geqslant x^2 + y$: donc $(f(x))^2 \geqslant x^2$.

Ainsi : **(II)** $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 \geqslant x^2$.

– Soit $z \in \mathbb{R}_-$.

Posons $y = z - (f(0))^2$. Alors $z = y + (f(0))^2 = f(0^2 + f(y)) = f(f(y))$.

D'après (I), $z = f(f(y)) \geqslant f(y)$; et d'après (II), $z^2 = (f(f(y)))^2 \geqslant (f(y))^2$.

Il vient $0 \geqslant z \geqslant f(y)$, et $|z| \geqslant |f(y)|$ soit $-z \geqslant -f(y)$ soit $f(y) \geqslant z$.

Donc $z = f(y)$, puis (appliquant f aux deux membres) $f(z) = f(f(y))$, donc $f(z) = z$.

Ainsi : **(III)** $\forall z \in \mathbb{R}_-,\ f(z) = z$.

En particulier $f(0) = 0$.

– Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x^2 + f(0)) = 0 + (f(x))^2 = (f(x))^2$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 = f(x^2) = f((-x)^2) = (f(-x))^2$.

Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, $(f(t))^2 = (f(-t))^2$ est égal, d'après (III), à $(-t)^2 = t^2$, donc compte tenu de (I), $f(t) = t$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$; et $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Comme $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ vérifie évidemment (E), en conclusion : $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant (E).

Jacobien

(O 124)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans lui même : $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, ..., \mathbf{x_n}) \mapsto (\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_{n-1}})$ où : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\mathbf{X} - \mathbf{x_i}) = \mathbf{X^n} + \mathbf{a_{n-1}X^{n-1}} + ... + \mathbf{a_1X} + \mathbf{a_0}$. Calculer le jacobien de f.

(Solution Gozard 7 3 02)

D'après les relations entre coefficients et racines $\forall k \in [[0, n-1]]$,

$a_k = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k} = (-1)^{n-k} \displaystyle\sum_{i_1 < i_2 < ... < i_{n-k}} x_{i_1} ....x_{i_{n-k}}$; Or $J(f)(x_1, ..., x_n) = \left(\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 1 \le j \le n}} (x_1, ..., x_n) = \left((-1)^{n-i}\dfrac{\partial \sigma_{n-1}}{\partial x_j}\right)_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 1 \le j \le n}} (x_1, ..., x_n)$.

Or $\dfrac{\partial \sigma_p}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \displaystyle\sum_{i_1 < i_2 < ... < i_p} x_{i_1} ....x_{i_p}}{\partial x_i} = \displaystyle\sum_{\substack{k_1 < k_2 < ... < k_p \\ \text{les } k_j \text{ dans } [[1,n]] - \{i\}}} x_{k_1} ....x_{k_{p-1}} = \sigma_{p-1}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ (avec la convention $\sigma_0 = 1$)

Donc $\boxed{\mathbf{J(f)(x_1, ..., x_n) = \Big((-1)^{n-i}\sigma_{n-1-i}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)\Big)}}$

EF Tchebytcheff

(O 131)

Trouver tous les polynômes P, Q de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ tels que $\mathbf{P(X)^2 + (1 - X^2)Q(X)^2 = 1}$.

(Un grand classique : TP0, Br 83 p133, Br 88 p179-184; Râ exos d'analyse p 215, Br 73 p 13...)

Supposons qu'il existe une solution (P, Q). Alors P n'est pas nul (cf les degrés) et si Q est nul, $P \in \{-1, 1\}$.

La relation (1) $\mathbf{P(X)^2 + (1 - X^2)Q(X)^2 = 1}$ Prouve que P^2 et Q^2 sont premiers entre eux, ainsi par conséquent que P et Q.

Par dérivation la relation (1) donne : $PP' = [XQ + (X^2 - 1)Q']Q$.

On en déduit que Q divise PP' et par Gauss Q divise P'.

Si P est de degré n, Q est de degré $n - 1$ d'après (1). Donc Q et P' sont proportionnels.

- Si $n = 0$, alors $P' = Q = 0$ et $P \in \{-1, 1\}$.
- Supposons désormais $n \geq 1$. la considération des termes de plus haut degré dans (1) donne : $Q^2 = \frac{1}{n^2}P'^2$.

P vérifie donc l'équation différentielle (2) $\mathbf{P^2 + \frac{1}{n^2}(1 - X^2)P'^2 = 1}$ avec degré(P)=$n \geq 1$.

Dérivons cette relation (2) : on obtient $2PP' - \frac{2X}{n^2}P'^2 + \frac{(1-X^2)}{n^2}2P'P" = 0$;

Comme $P' \neq 0$ puisque $deg(P) = n > 0$ et comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, on a : $(1 - X^2)P" - XP' + n^2P = 0$.

Or considérons l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même définie par $f(S) = (1 - X^2)S" - XS' + n^2S$; Par linéarité de la dérivation et les propriétés (distributivité) du produit des polynômes, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On vérifie de plus que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par f avec conservation exacte du degré. La famille des $f(X^i)$ $i = 0..n-1$ est donc libre dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc $rang(f) \geq n$ et donc son noyau est de dimension $\imath eq1$ à cause de la formule du rang.

Il suffit donc de trouver une solution particulière non nulle, puisque l'espace des solutions de (2) dans $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension 1 au maximum.

Or le changement de variable $x = \cos t$ dans (2) $(1 - X^2)y" - Xy' + n^2y = 0$ donne en posant $y*(t) = y(\cos t)$:

$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y*}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial y*}{\partial t}\frac{1}{\partial x/\partial t} = \frac{\partial y*}{\partial t}\frac{1}{-\sin t}$; de même : $dd2yxx = \frac{\partial \frac{\partial y*}{\partial t}\frac{1}{-\sin t}}{\partial t}(\frac{1}{-\sin t}) = \frac{1}{\sin^2 t}\frac{\partial^2 y*}{\partial t^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{\partial y*}{\partial t}$;

Le report dans (2) donne (3) $\frac{\partial^2 y*}{\partial t^2} + n^2y* = 0$ dont la solution générale est $y*(t) = A\cos nt + B\sin nt$ Une solution évidente non nulle de (2) est donc $AT_n(x)$. (polynôme de TCHEBYTCHEFF de première espèce).

La seule solution possible de (1) est donc $P = AT_n$ $Q = \varepsilon\frac{1}{n}T'_n$; Or $T'_n(X) = n\sin nt\frac{1}{\sin t}$ et le report dans (2) donne $1 = A^2$; La solution générale de (1) est donc $\boxed{\mathbf{P = \varepsilon T_n} \quad \Big| \quad \mathbf{\frac{\varepsilon'}{n}T'_n}}$ où T_n est le polynôme de TCHEBYCHEFF $T_n(_cost) = \cos nt$.

Inverse corsé

(O 147)

> **Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{3,2}}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B} \in \mathbf{M_{3,2}}(\mathbb{R})$ telles que** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**
>
> **Calculer $(\mathbf{AB})^2$. Montrer que BA est inversible et calculer BA.**
>
> *(Bib utile TPE 1994 Math 2 dont j'ai copié collé ma solution en TEX ; officiel de prépa 95 janvier 96 planche 17A ; O2 2000 381 tex ; Leichtnam 196, généralisé bloc p 181 ; Lafond le 14 juin dit par mail que c'est un exercice Putnam 1969, il m'en a envoyé une solution (zip) en word, par combinaisons matricielles élémentaires)*

On trouve $(AB)^2 = AB$. Donc $X^2 - X$ est annulateur pour AB. Donc soit par le calcul direct sur AB soit parce qu'à cause du polynôme annulateur les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1 et en éliminant tous les cas posibles le seul cas où la trace de AB peut être 2 est celui où les valeurs propres sont $(0, 1, 1)$.

Or (cours où on l'a fait par bloc, même lorsque les matrices n'étaient pas carrées) on a $det(AB - tI) == (-t)det(BA - tI)$.

Donc seule $t = 0$ est valeur propre supplémentaire de celle de BA pour former les valeurs propres de AB.

BA a pour valeurs propres $1, 1$ donc est inversible de déterminant 1.

□ Première solution : Montrons que BA est diagonalisable d'où on pourra écrire $\boxed{\mathbf{BA = I_2 \text{ et } M_o = I_{2n}}}$.

Si x est vecteur propre de AB associé à la valeur propre 1, alors $ABx = x$; donc $BA(Bx) = (Bx)$. Il suffit de montrer que (Be_2, Be_3) est libre pour pouvoir conclure. Or

$\alpha Be_2 + \beta Be_3 = 0 \Rightarrow \alpha ABe_2 + \beta ABe_3 = 0 \iff \alpha Ce_2 + \beta Ce_3 = 0 \iff (\alpha e_2 + \beta e_3) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ car (e_2, e_3) est libre.

□ Seconde solution : **M1** On $ABAB = AB$ donc $ABAB - AB = 0$. On factorise A à gauche, B à droite : $A(BA - I)B = 0$. Or BA est inversible (carrée et de valeur propre 1 non nulle) donc A est injective et B surjective (le faire directement ou tuliser section et rétraction) : donc $BA = I$; On peut aussi multiplier à gauche par B et à droite par A et comme BA est inversible en simplifiant par BA à gauche et par BA à droite (ce qui revient à multiplier par son inverse) on a $\boxed{\mathbf{BA=I}}$.

□ Troisième solution : À une similitude près AB est semblable à $diag(1,1,0) = D' = A'B'$. Or cela implique $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec ad-bc$\neq 0$ et $B' = \begin{pmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par suite aussi, tout inverse à droite $A'/9$ étant aussi inverse à gauche : $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on a aussi $t = u = 0$ Et en revenant à A et B par similitude, on conclut facilement.

Trigonale de Blocs Diag ?

(O 149)

Soient A et B deux matrices de $\mathbf{M_n}(\mathbb{C})$ qui commutent. Condition nécéssaire et suffisante pour que la matrice S $= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ **soit diagonalisable.**

(Voir un autre exercice RMS juin 01 num 148)*

On songe à chercher un polynôme annulateur P n'ayant que des racines simples. Un récurrentre triviale (A et B commutent rappelons le) prouve que

$$S^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \text{ ; par conséquent } P(S) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

Pour que les blocs diagonaux s'annulent, on est obligé de prendre $P)\mu_A$; $P'(A)$ n'est pas nul puisque P est minimal pour A. Il reste que S sera diagonalisable si et seulement si $P'(A)B = BP'(A) = 0$. Que dire de plus, à part que $Im(B) \subseteq Ker(P'(A))$?

(Remarque de Frédéric Doué par mail 22 4 02 19h47)

Vu que P et P' sont premiers entre eux (car P n'a que des racines simples), par BEZOUT on a $UP + VP' = 1$, d'où $B = U(A)P(A)B + V(A)P'(A)B = 0$ ... La conclusion est que **B doit être nulle;**

AtAA=I

(O 157)

Résoudre dans $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$: A ^{t}AA $= \mathbf{I_n}$. Que se passet-il dans $\mathbf{M_n}(\mathbb{C})$?

(BIB ; 0 97-429 "Blanchard" ; Bloc Vuibert 181 généralise ; Br 92 p 174-175 ; Tp 14 p 3-4 dec de Cartan SPM 1, Deschamp alg 191, ROD 2 p 122 ; système GC Aubonnet 85 ; O2000 151* rms mai 01 p 1039)

Cherchant A sous sa forme décomposée de CARTAN (démonstration analogue à celle d'Iwasawa), qui rappelons le est unique, on a : $A = OH$ avec O orthogonale et H symétrique définie positive (c'est à dire que la forme quadratique qu'elle définit est définie positive) : ${}^tA = H{}^tO$;

L'équation s'écrit : $I = A{}^tAA = OHH{}^tOOH = OH^3$ (puisque O étant orthogonale ${}^tOO = I$) ; soit comme I s'écrit I.I (I à gauche orthogonale, I à droite symétrique définie positive.

Or comme la décomposition de CARTAN est unique O=I et $H^3 = I$, qui a une unique racine cubique matricielle définie positive symétrique : I elle même : donc $\boxed{\mathbf{A = I}}$ est la seule solution.

□*(autre solution Blanchard e-mail)* A est inversible et $A^{-1} =^t AA$, donc est symétrique réelle de $M(n,\mathbb{R})$, donc ortho-diagonalisable, donc $D^3 = I$. et D=I. PB si A est dans $M(n,\mathbb{C})$ elle est toujours diagonalisable mais semblable à $diag(1,,,j^2)$. *(exo Analogue)* $A + 2\ {}^tA -\ {}^tAA = 0$. Transposer pour démontrer que A est symétrique. Il est bon de faire le parallèle avec les complexes $z\bar{z}z = 1$;

Démonstration de la décomposition de CARTAN : unicité : si $v^k = u$ avec u et v définis positifs symétriques ; u et v commutent (évident), donc tout espace propre E_i,pour u (qui est orthog-diagonalisable, puisque symétrique) ; soit v_i la restriction de v à E_i ; on a $v_i^k = \lambda_i I_i$; v_i restriction d'un endomorphisme symétrique positif, le reste par changement de base orhogonale propre (celle de u) ; Il est donc diagonalisable, tandis que par changement de base othonormée I_i reste I_i : soit $diag(\alpha_1, ...)$ sa forme diagonale : on a $\alpha_1^k = \lambda_i$, $\alpha_2^k = \lambda_i$, etc ; comme les α_i valeurs propres d'un endomorphisme symétrique positif est positive, on a : $\alpha_i^k = \lambda_i$ et $\alpha_i = \sqrt[k]{\lambda_i}$: il y a unicité ; il est immédiat de vérifier qu'elle convient ;

Profitons en pour en déduire la décomposition de CARTAN : Soit A inversible ; Si A=OH ${}^tA ={}^t H {}^tO = HO^{-1}$ donc ${}^tAA = H^2$; or il est immédiat que ${}^tAA$ est symétrique positive (en effet la forme quadratique ${}^tX{}^tAAX = ||AX||^2$ est positive) ; donc d'après le début il existe une seule matrice H vérifiant cette propriété.

Comme A est inversible : $(det\ H)^2 = (det(A))^2 \neq 0$: H est inversible et la relation donne $O = AH^{-1}$. Le problème admet donc au plus une seule solution : le couple (AH^{-1}, H) ;

Pour vérifier que ce couple convient, il suffit de s'assurer que AH^{-1} est orthogonale, ce qui est le cas puisque : ${}^t(AH^{-1})(AH^{-1}) = H^{-1}\ {}^tAAH^{-1}H^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I_n$. Si on suppose A non régulière, il y a encore existence, mais pas forcément unicité, car l'inversibilité de A intervient dans la démonstration d'unicité.

★ Adhérence

(O 166)

Soit $\mathbf{E} = \mathbf{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\mathbf{F} = \{\mathbf{f} \in \mathbf{E} \mid \mathbf{f(0) = f(1) = 0}\}$. Trouver l'adhérence et l'intérieur de F lorsque E est muni de $||\ ||_\infty$ puis lorsque E est muni de $||\ ||_1$.

(était aussi la question 159 de O2000 voir aussi RMS)*

• Soit $u_0 : E \to \mathbb{R}$ définie par $u_0(f) = f(0)$ et $u_1 : E \to \mathbb{R}$ définie par $u_1(f) = f(1)$; ce sont des formes linéaires continues lorsque E est muni de $||\ ||_\infty$, en effet pour tout f de E on a $|f(0)| \leq ||f||_\infty$ et $|f(1)| \leq ||f||_\infty$ (propriété (5) du cours) et ainsi $|||u_0||| \leq 1$ et $|||u_1||| \leq 1$.

Par conséquent $F = u_0^{-1}(\{0\}) \bigcap u_1^{-1}(\{1\})$ est fermé dans $(E, ||\ ||_\infty)$.

• Si $f \in F$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $f + \varepsilon \in B_f(f, \varepsilon)$ et $f + \varepsilon \notin F$ donc $\boxed{\mathbf{Int(F)} = \emptyset}$ pour la norme $||\ ||_\infty$.

• • Soit $f \in E$. Pour tout $n \geq 2$, on définit $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_n|[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = f|[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] \\ f_n(0) = 0,\ f_n \text{ affine sur } [0, \frac{1}{n}] \quad \text{ et } f_n(\frac{1}{n}) =)f(\frac{1}{n}) \\ f_n(1) = 0,\ f_n \text{ affine sur } [1-\frac{1}{n}, 1] \quad \text{ et } f_n(1-\frac{1}{n}) =)f(1-\frac{1}{n}) \end{cases}$$

On a $||f_n - f||_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n - f| + \int_{1-1/n}^1 |f_n - f| \leq \frac{2}{n}(||f_n||_\infty + ||f||_\infty) \leq_{\text{puisque par construction } ||f_n||_\infty \leq ||f||_\infty} \frac{4}{n}||f||_\infty \to 0$. Par suite $\boxed{\mathbf{Adh(F)}_{||\ ||_1} = \mathbf{E}}$.

☐ Si $f \in F$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $f + \varepsilon \in B_f(f, \varepsilon)$ (pour la norme $||\ ||_1$), puisque $||f||_1 \leq ||f||_\infty$ et $f + \varepsilon \notin F$, donc $\boxed{\mathbf{Int(F)} = \emptyset \text{ pour la norme } ||\ ||_1}$.

EF, endo, VP

(O 187)

Soit E l'ensemble des fonctions réelles développables en séries entières au voisinage de 0 et $\mathbf{u : E \to E}$ définie par $\mathbf{u(f)(x) = f(x) + f(\frac{x}{2})}$. Montrer que u est un endomorphisme de E, qu'il est inversible, et trouver les valeurs propres.

BIB : Cet exercice (O187-2001) est très classique, avec différentes variantes, soit que $f(\frac{x}{2})$ soit remplacé par $f(x)$ ou $f(\frac{x+1}{2})$, soit qu'on demande l'injectivité de u et sa non surjectivité, soit de caractériser $u(E)$, soit que E soit remplacé par d'autres espaces fonctionnels, soit de calculer $|||u|||$, soit enfin que la recherche des fonctions propres soit remplacée par des équations précises $u(f) = 2f$ ou $u(f) = 4f$, qui sont en fait la recherche d'espaces propres particulier ; voici quelques références O2000 numéro 160 (corrigé (par Gozard) sur le fichier mis à disposition de la bourse 2001 ; Bréal 83 page 31 ; Oral 84 180 ; oral 89 numéro 3 ; Bréal 86 page 126 ; Bréal 89 page 221 ; Lyon 3 1990 ; Bloc Vuibert prépas page 142 ; Spm 3 p 84 pour une équation fonctionnelle similaire ; ronéo équations fonctionnelles *(méthode de la série p 4-5) ; Arnaudies tome 2 (Dunod 1972) page 604 exo "12" comme par hasard ; Exercices Lelong p 237 ; Voir aussi O-2001 165 et 168 et 187, 384 et planche 184 II ; Br 77 p 47-48 ; Tissier 2 p 149 ; concours général 1979)*

Soit R_f le rayon de convergence d'un élément $f = \sum a_n x^n$ de E. Comme $|x| < R_f$ implique $|\frac{x}{2}| < R_f$, $u(f)(x)$ est bien défini sur $B_o(R)$ et $u(f)(x) = \sum a_n(1+\frac{1}{2^n})x^n$. donc $u(E) \subseteq E$; Sa linéarité étant une conséquence de sa formule de définition ou de la linéatité de la somme d'une série entière convergente.

Montrons son inversibilité en démontrant l'existence et l'unicité d'une solution de $u(f) = g$, pour tout $g \in E$.

Par linéarité, en remplaçant au besoin g par $g - g(0)$ on peut supposer $g(0) = 0$ et alors la spécialisation $x = 0$ dans $u(f)(x) = g(x)$ donne $f(0) = 0$.

Une récurrence triviale dans la relation $u(f)(x) = f(x) + f(\frac{x}{2}) = g(x)$ donne $f(\frac{x}{2^k}) + f(\frac{x}{2^{k+1}}) = g(\frac{x}{2^k})$; soit

$$\begin{cases} f(x) + f(\frac{x}{2}) = g(x) \\ f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x}{4}) = g(\frac{x}{2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f(\frac{x}{2^n}) + f(\frac{x}{2^{n+1}}) = g(\frac{x}{2^n}) \end{cases}$$

(piège la dernière est ligne numéro $n+1$)

On multiplie la ligne k par $(-1)^{k-1}$ et on ajoute : ■ $f(x) + (-1)^{n-1} f(\frac{x}{2^{n+1}}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} g(\frac{x}{2^{k-1}})$.

Et comme d'une part, $f(\frac{x}{2^{n+1}})$ tend vers $f(0) = 0$ lorsque n tend vers l'infini (la série de f étant convergente, pour $|x| < R_f$, donc continue en 0, et d'autre part $\sum (-1)^{k-1} g(\frac{x}{2^{k-1}})$ est convergente (*).

On a $\boxed{\mathbf{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g(\frac{x}{2^k})}}$

Il y a injectivité et surjectivité de u.

Justifions ce dernier point (*) : en effet si $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ de rayon $R_g > 0$. on a $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k g(\frac{x}{2^k}) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{2^{nk}}$ et l'on peut tenter une justification de permutation de sommations (éssayez le rigoureusement : s'il y a absolument convergence, pour une bijection de $\mathbb{N}^2$, ce fait est indépendant de la bijection choisie et les sommes sont les mêmes) est possible, mais il est plus astucieux de remarquer, que s étant la valuation de la série g ($s \geq 1$, c'est pour cela que nous nous sommes ramenés à $g(0) = 0$ en préliminaires) (si $g = 0$ ce n'est pas la peine de se fatiguer) on a $g(x) \sim_{x=0} b_s x^s$ par conséquent pour x fixé : $|(-1)^k g(\frac{x}{2^k}) \sim |b_x \frac{x^s}{(2^s)^k})|$, qui est le terme général d'une série convergente (car de raison $\frac{1}{(2^s)} < 1$ car ($s \geq 1$). La justification est encore plus rapide si l'on sait $g = u(f)$ car les sommes partielles se télescopent et l'on retombe sur ■.

La recherche des fonctions $t-$propres, se ramène à résoudre $\sum a_n(1+\frac{1}{2^n}-t)x^n = 0$ et par unicité de développement en série entière $a_n(1+\frac{1}{2^n}-t) = 0$ pour tout n ; ⚠ Attention au piège des diviseurs de zéro ! s étant la valuation de la série de f (s existe finie, car f étant propre n'est pas la série nulle) il vient $t = 1 + \frac{1}{2^s}$ et puisqu'alors pour $n \neq s$, $1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^s} \neq 0$, $a_n = 0$ et les valeurs propres sont les $\boxed{\mathbf{t_s = 1 + \frac{1}{2^s}}}$ et les espaces propres associés sont engendrés par les monomes x^s.

Remarque : quand E est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continues en 0, on peut démontrer que l'appartenance à $u(E)$ pour une fonction g équivaut à la convergence de la série $\sum (-1)^k g(\frac{x}{2^k})$. La non surjectivité se faisant en exhibant un élément de E associé à une telle série divergente : par exemple $g(0) = 0$ et pour $x_n ot = 0$, $g(x) = \frac{(-1)^{E(-\frac{\ln|x|}{ln2})}}{1+|\ln|x||}$, ou bien plus simplement affine par morceaux telle que $g(\frac{1}{2^k}) = (-1)^k \frac{1}{k+1}$, qui donne pour $\sum (-1)^k g(\frac{x}{2^k})$ une série harmonique divergente.

---

(189) ★

EF intégrale

Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles ques $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ $\mathbf{f(x) - 2x \int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = 1}$

(Voir détails sur le fichier O2, Br90 p 80, voir aussi par SE juin 99 num 238)

(La seule différence entre Br 90 et cet Oral 189 est un x devant l'intégrale, l'équation différentielle est un peu plus compliquée mais le principe est le même)

Résolution de $\mathbf{f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = 1}$. (sans le x)

Rappelons le théorème : Soit g une application continue sur $\mathbb{R}^2$, admettant une dérivée partielle par rapport à la première variable, continue sur $\mathbb{R}^2$, et si u est une application dérivable, alors la fonction $x \mapsto G(x) = \int_0^{u(x)} g(x,t)dt$

est dérivable et sa dérivée (droit de dériver sous le signe somme) vérifie $G'(x) = \int_0^{u(x)} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt + g(x, u(x))u'(x)$.

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,t) = f(t)\cos(x-t)$ vérifie les hypothèses ci-dessus.

Donc si f vérifie l'équation fonctionnelle proposée, elle est dérivable (choix de $u(x) = x$, et en dérivant par rapport à x les deux membres de l'équation fonctionnelle (après avoir constaté leur dérivabilité), il vient : (*) $f'(x) + 2\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt - 2f(x) = 0$.

Pour les mêmes raisons que ci-dessus f' est dérivable, et la dérivation de (*) donne en tenant compte de l'équation fonctionnelle vérifiée par f $f" - 2f' + f = 1$ (**)

Pour $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle et dans (*) on obtient les conditions initiales : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

La résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre (**) (expliquer) donne avec les conditions initiales ci-dessus l'unique solution $\boxed{\mathbf{f(x) = 2xe^x + 1}}$

Réciproquement (indispensable de la faire, nous avons procédé par dérivation donc par conditions nécéssaires) on vérifie que cette seule fonction possible convient. (Le faire en détaillant la vérification).

Young : Min intégrale

(O 190)

Soit $\mathbf{f \in C([-1,1],\mathbb{R})}$ strictement croissante telle que f(1)=1. On pose $\varphi(\mathbf{x}) = \int_{-1}^{1} |\mathbf{f(t) - x}|\mathbf{dt}$. Étudier la fonction φ et déterminer sa borne inférieure.

(Br 90 p 86 et Pour une analogie avec l'inégalité de Young voir Bass Vert p81, Chambadal ex p 64 et George intégration, Rivaud III droite affine d'appui p 81, spm x p 124, elle sert pour établir l'inégalité de Hölder)

Puisque nous avons la possibilité sans frais de généraliser cet exercice à des bornes générales et sans contrainte de valeur en b, il n'y a aucune raison de se géner.

On remplace $[-1,1]$ par $[a,b]$.

On remarque d'abord que si $t \in [a,b]$ alors

$$\begin{cases} x \geq f(b) & \text{alors } |f(t) - x| \geq f(b) - f(t) \geq 0 \text{ donc } \varphi(x) \geq \varphi(b) \\ x \leq f(a) & \text{alors } |f(t) - x| \geq f(t) - f(a) \geq 0 \text{ donc } \varphi(x) \geq \varphi(a) \end{cases}$$

Par conséquent l'infimum I, demandé sera obtenu pour $x \in [a,b]$.

La continuité de f, sa croissance et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que $[f(a), f(b)] = f([a,b])$.

Donc le minimum cherché est celui de $g(u) = \int_a^b |f(t) - f(u)|dt$ pour $u \in [a,b]$.

Soit $c = \frac{a+b}{2}$. La croissance de f donne, pour $u \in [a,b]$, $g(u) = \int_a^u (f(u) - f(t))dt + \int_u^b (f(t) - f(u))dt = 2\int_c^u (f(u) - f(t))dt + g(c)$ (car $b - c = c - a$).

Mais grâce à la croissance de f, on a pour tout $u \in [a,b]$ $\int_c^u (f(u) - f(t))dt = \int_u^c (f(t) - f(u))dt \geq 0$.

Il en résulte que $g(u) \geq g(c)$ et donc $\boxed{\mathbf{I} = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{f(t) - x}|\mathbf{dt} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{f(t)} - \mathbf{f}(\tfrac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{2}})|\mathbf{dt}}$

Si f est strictement croissante, le suivi des cas d'égalité dans les inégalités obtenues, assure que ce minimum n'est atteint qu'en c. g décroît jusqu'à c, puis croît après (faire un dessin).

-

(O 200)

Équivalent en $+\infty$ de $\mathbf{g(x)} = \int_{\mathbf{x}}^{+\infty} \mathbf{e^{-t^2}dt}$.

(Rms juin 79 p 416)

La vérification de la convergence de l'intégrale intervenant est une question de cours (revoyez votre cours mon vieux !).

On va même obtenir un développement asymptotique d'ordre aussi élevé qu'on le désire. On pose $f(x) = e^{x^2}g(x) = e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Dans l'intégrale on fait le changement de variable $t = x + u$: $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2xu-u^2}du$. Puis le changement $2xu = v$ $(x > 0)$. $f(x) = \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-v-\frac{v^2}{4x^2}}dv$.

Considérons alors pour $t \geq 0$ la fonction φ_n définie par $\varphi_n(t) = e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!}$. On constate que $\varphi_n'(t) = -\varphi_{n-1}(t)$.

Un résurrence immédiate prouve que $\varphi_n(t)$ est pour tout $t \geq 0$, du signe de $(-1)^{n-1}$, c'est à dire $(\forall t \geq 0)$, $(\forall n)$ $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n+1} \frac{(-1)^p t^p}{p!} \leq e^{-t} \leq \sum_{p=0}^{2n} \frac{(-1)^p t^p}{p!}$.

On peut donc écrire, en appliquant ces inégalités à $e^{|\frac{v^2}{4x^2}}$,

$\frac{1}{2x}\sum_{p=0}^{2n+1}\frac{(-1)^p}{(4x^2)^p p!}\int_0^{+\infty} v^{2p}e^{-v}dv \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}\sum_{p=0}^{2n}\frac{(-1)^p}{(4x^2)^p p!}\int_0^{+\infty} v^{2p}e^{-v}dv$, ceci pour tout n et pour tout $x>0$.

En posant $\Gamma(k)=\int_0^{+\infty} v^k e^{-v}dv$ le cours ou une récurrence (intégrer par parties implique $\Gamma(k)=k\Gamma(k-1)$) donne $\Gamma(k)=k!$.

On en déduit que $\frac{1}{2x}\sum_{p=0}^{2n+1}\frac{(-1)^p(2p)!}{(4x^2)^p p!} \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}\sum_{p=0}^{2n}\frac{(-1)^p(2p)!}{(4x^2)^p p!}$.

La différence entre majorant et minorant est de la forme $\frac{A}{x^{4n+2}}$; le second membre constitue donc un développement limité à l'ordre $4n$ de $f(x)$.

et on a $\boxed{\mathbf{g(x)=\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt = e^{-x^2}\Big(\sum_{p=0}^{2n}\frac{(-1)^p(2p)!}{4^p p! x^{4p+1}}\Big)+o(\frac{1}{x^{4n+1}}}}$

Par exemple $g(x)=e^{-x^2}\big(\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^3}+\frac{3}{8x^5}+O(\frac{1}{x^7})\big)$.

On n'aurait pas pu obtenir un développement de f par la méthode de l'équation différentielle, car il est immédiat de remarquer que la série ayant le même terme général que le déveoppement limité précédent, diverge. Par contre au voisinage de $x=0$ cette méthode ne poserait aucun problème.

---

(226) ★ Orbites

Si x est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, on note $\mathbf{\Delta x}=\{\lambda \mathbf{x}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}_+\}$. On appelle $\mathcal{T}$ l'ensemble des triplets $(\mathbf{\Delta e_1},\mathbf{\Delta e_2},\mathbf{\Delta e_3})$ tels que les droites $\mathbb{R}\mathbf{e_1},\mathbb{R}\mathbf{e_2},\mathbb{R}\mathbf{e_3}$, soient deux à deux distinctes. On considère l'action de groupes :

$$\begin{array}{ccc} GL(\mathbb{R}^2)\times\mathcal{T} & \to & \mathcal{T} \\ (u,(\Delta e_1,\Delta e_2,\Delta e_3)) & \mapsto & (u(\Delta e_1),u(\Delta(e_2),u(\Delta(e_3)) \end{array}$$

Combien y a-t-il d'orbites ?

(Solution Gozard 8 mars 2001) (Note de LGV : Le lecteur friand de généralisation ou de prolongement pourra consulter le problème d'agrégation 1970 RMS mai 71 : il n'y a pas de permutation affine d'ordre 3 sur les droites d'un hyperboloïde à une nappe, et aussi enset 1971 RMS mars 1972)

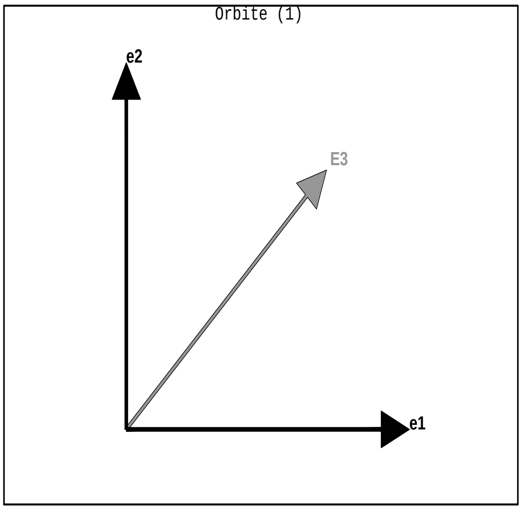
Remarquons que :
pour $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $\Delta(\alpha x)=\Delta x$;
pour x et y non nuls, $\Delta x=\Delta y \Leftrightarrow (\exists t>0$ tel que $y=tx)$;
pour $u\in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$, $u(\Delta x)=\Delta u(x)$;
et que si $(\Delta e_1,\Delta e_2,\Delta e_3)\in\mathcal{T}$, alors (e_1,e_2), (e_2,e_3) et (e_1,e_3) sont libres.

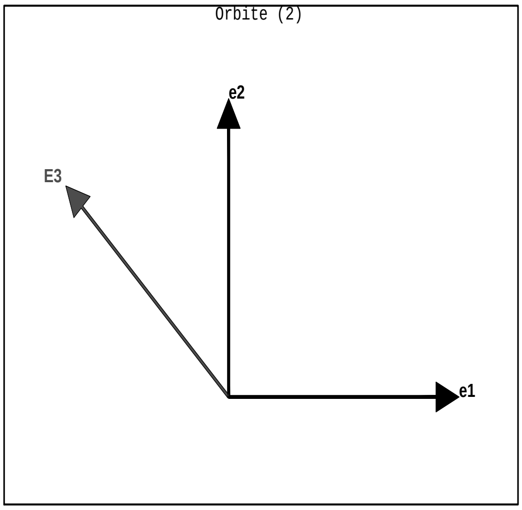
Soit $(\Delta e_1,\Delta e_2,\Delta e_3)\in\mathcal{T}$.
(e_1,e_2) est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$ donc il existe un unique $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $e_3=\alpha e_1+\beta e_2$.
(e_2,e_3) est libre donc $\alpha\neq 0$, (e_1,e_3) est libre donc $\beta\neq 0$.
Soit $(\Delta f_1,\Delta f_2,\Delta f_3)\in\mathcal{T}$. Raisonnant de même il existe un unique $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f_3=\lambda f_1+\mu f_2$, et on a : $\lambda\mu\neq 0$.
Pour $u\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$, $u.(\Delta e_1,\Delta e_2,\Delta e_3)=(u(\Delta e_1),u(\Delta e_2),u(\Delta e_3))=(\Delta u(e_1),\Delta u(e_2),\Delta u(e_3))$.
Donc $u.(\Delta e_1,\Delta e_2,\Delta e_3)=(\Delta f_1,\Delta f_2,\Delta f_3)\Leftrightarrow\exists(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que $(u(e_1),u(e_2),u(e_3))=(af_1,bf_2,cf_3)$.
Comme $f_3=\lambda f_1+\mu f_2$ et $u(e_3)=\alpha u(e_1)+\beta u(e_2)$,
$(u(e_1),u(e_2),u(e_3))=(af_1,bf_2,cf_3)$ équivaut à $(u(e_1),u(e_2),\alpha u(e_1)+\beta u(e_2))=(af_1,bf_2,c(\lambda f_1+\mu f_2))$,
soit à $(u(e_1),u(e_2),\alpha af_1+\beta bf_2)=(af_1,bf_2,c\lambda f_1+c\mu f_2)$,
soit à $(u(e_1),u(e_2),\alpha a,\beta b)=(af_1,bf_2,c\lambda,c\mu)$.
– Si ceci est vérifié, alors $\alpha\lambda=\frac{a}{c}\alpha^2>0$ et $\beta\mu=\frac{b}{c}\alpha^2>0$.
– Réciproquement, si $\alpha\lambda>0$ et $\beta\mu>0$, alors on pose $(a,b,c)=(\frac{\lambda}{\alpha},\frac{\mu}{\beta},1)$ et on considère l'unique élément u de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $u(e_1)=af_1$ et $u(e_2)=bf_2$. $u\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ car l'image d'une base est une base,
et $u(e_3)=\alpha u(e_1)+\beta u(e_2)=\alpha af_1+\beta bf_2=\lambda f_1+\mu f_2=f_3=cf_3$.
Donc $u.(\Delta e_1,\Delta e_2,\Delta e_3)=(\Delta f_1,\Delta f_2,\Delta f_3)$.

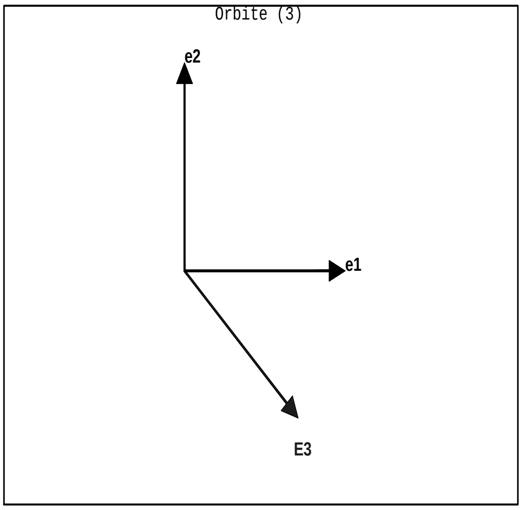
Ainsi $(\Delta e_1,\Delta e_2,\Delta e_3)$ et $(\Delta f_1,\Delta f_2,\Delta f_3)$ sont dans la même orbite si, et seulement si :
$(e_1^*(e_3)f_1^*(f_3)>0$ et $e_2^*(e_3)f_2^*(f_3)>0)$.

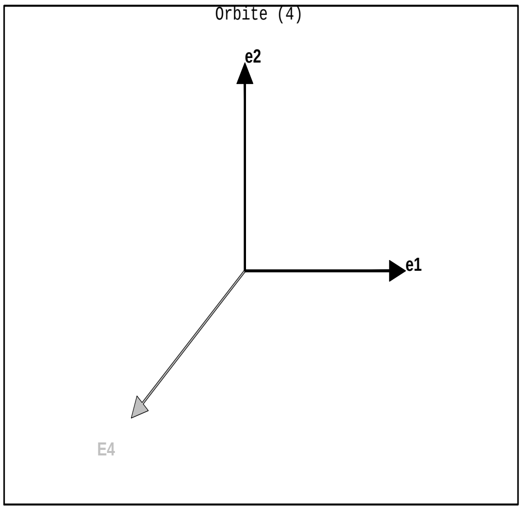
Il y a donc quatre orbites. Notant $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, ce sont les orbites de $(\Delta\varepsilon_1,\Delta\varepsilon_2,\Delta(\varepsilon_1+\varepsilon_2))$, de $(\Delta\varepsilon_1,\Delta\varepsilon_2,\Delta(\varepsilon_1-\varepsilon_2))$, de $(\Delta\varepsilon_1,\Delta\varepsilon_2,\Delta(-\varepsilon_1+\varepsilon_2))$, et de $(\Delta\varepsilon_1,\Delta\varepsilon_2,\Delta(-\varepsilon_1-\varepsilon_2))$.

: Note de LGV : Le programme suivant en Maple (V-4) donne les figures incluses dans ce texte.
with(geometry): with(plots):with(plottools): *(Voir l'aide)*
$V1 := arrow([0,0],[1,0],.01,.1,.1,color = black)$:
$T1 := textplot([1,0,\text{`}e1\text{`}],font = [HELVETICA,BOLD,20],align = ABOVE,RIGHT)$:
$V2 := arrow([0,0],[0,1],.01,.1,.1,color = black)$:
$T2 := textplot([0,1,\text{`}e2\text{`}],font = [HELVETICA,BOLD,20],$
$align = ABOVE,RIGHT,scaling = CONSTRAINED)$:
$V31 := arrow([0,0],[1/sqrt(2),1/sqrt(2)],.01,.1,.1,color = green)$:
$T31 := textplot([0.72,0.72,\text{`}E3\text{`}],font = [HELVETICA,BOLD,20],$
$align = ABOVE,RIGHT,color = GREEN)$:
$display(V1,T1,V2,T2,V31,T31,title = \text{`}Orbite(1)\text{`},axes = NONE)$;









Suite Rec multiforme

(277)

Soit a > 0. On considère la suite $(\mathbf{u_n})$ définie par $\mathbf{u_0 = a}$ et $\mathbf{u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}}$ si 3 divise n, $u_{n+1} = \frac{16}{u_n}$ sinon.
Même question avec $u_{n+1} = \frac{16}{u_n}$ si 3 divise n, et $\mathbf{u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}}$ sinon.

Quelle est la question posée ? (coquille de la RMS=DM)
On pose pour simplifier $f(x) = \sqrt{4+3x}$ et $g(x) = \frac{16}{x}$. On remarque que g est involutive ($g \circ g = Id_{\mathbb{R}}$).

■ Dans le premier cas : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = f(u_0) \\ u_2 = g(u_1) = (g \circ f)(u_0) \\ u_3 = g(u_2) = (g \circ g \circ f)(u_0) = f(u_0) \end{cases}$

Une récurrence immédiate donne $u_{3k} = f(u_{3k-3}$; or f est (strictement) croissante et comme $0 \leq f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} \leq \frac{3}{4} < 1$ elle est $\frac{3}{4}-$ *contractante* dans $\mathbb{R}^+$ complet, donc la suite (u_{3k}) converge vers le seul point fixe 4 de f dans $\mathbb{R}^+$ (en effet $f(x) = x \iff x \geq 0$ et $x^2 - 3x - 4 = 0$ de racines $4 > 0$ et $-1 < 0$ qui ne convient pas. Comme $g(4) = 4 = f(4)$ et que g et f est continue, ainsi que g (sur $\mathbb{R}_*$), $u_{3k+1} = f(u_{3k} \to f(4) = 4$; $u_{3k+2} = g(u_{3k+1}) \to g(4) = 4$. Les trois suites partielles u_{3k+r}, $r = 0..2$ étant toutes convergentes et ce vers la même limite on en déduit que $\boxed{\textbf{La suite } (\mathbf{u_n}) \textbf{ converge vers 4}}$

■ Dans le second cas : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = g(u_0) \\ u_2 = f(u_1) = (f \circ g)(u_0) \\ u_3 = f(u_2) = (f \circ f \circ g)(u_0) = F(u_0) \end{cases}$ (où l'on a posé $F = f \circ f \circ g$)

Une récurrence immédiate donne $u_{3k} = F(u_{3k-3}$;

Or $F(x) = \frac{16}{\sqrt{4+3\sqrt{4+3x}}}$ est décroissante (strictement), donc $G(x) = F(x) - x$ est aussi décroissante et comme $G(0) > 0$ et $G(+\infty) = -\infty < 0$ le théorème des valeurs intermédiaire assure l'existence d'un point fixe, unique à caude de la décroissance stricte de G, point fixe qui est d'ailleurs 4 puisque $F(4) = \frac{16}{\sqrt{4+3\sqrt{4+3.4}}} = 4$.

Mais comme $0 < F'(x) = \frac{4\frac{3}{\sqrt{4+3x}}}{\sqrt{4+3\sqrt{4+3x}}(4+3\sqrt{4+3x})} = \frac{12}{2.2.4} = \frac{3}{4} < 1$, F est donc $\frac{3}{4}$ contractante et encore (u_{3k}) converge vers 4, ainsi que les suites $u_{3k+1} = f(u_{3k}) \to f(4) = 4$ et $u_{3k+2} = g(u_{3k+1}) \to g(4) = 4$.

Dans le second cas aussi, $\boxed{\textbf{La suite } (\mathbf{u_n}) \textbf{ converge vers 4}}$

---

ordre

(338)

Soit (G,.) un groupe, de neutre 1, et a,b dans G. On note w(a) l'ordre de a. (a) montrer que w(a)=w(b)=w(ab)=2 implique ab=ba
(b) Montrer que $\mathbf{w(a) < +\infty \implies w(a^{-1}) < +\infty}$.
(c) Montrer que $\mathbf{w(a) = w(bab^{-1})}$
(d) Montrer w(ab)=w(ba)
(e) Montrer $\mathbf{|G| < +\infty \implies w(a) \| G|}$.

(Solution Gozard 7 mars 02)

(a) $e = (ab)^2 = abab$ donc $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, or $a^2 = e$ et $b^2 = e$ donc $a^{-1} = a$ et $b^{-1} = b$ donc $ab = ba$.

(b) Il suffit de remarquer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $(a^{-1})^k = (a^k)^{-1}$ donc $(a^{-1})^k = e \iff (a^k)^{-1} = e \iff a^k = e$. Donc non seulement $w(a^{-1}) < +\infty$, mais en plus $w(a^{-1}) = w(a)$.

(c) Il suffit d'observer que $\forall k \in \mathbb{N}(bab^{-1})^k = ba^kb^{-1}$.

Par conséquent : $(bab^{-1})^k = e \iff ba^kb^{-1} = e \iff a^k = e$ d'où le résultat demandé.

(d) Conséquence du (c) : $w(ab) = w(b(ab)b^{-1})$... c'est à dire $w(ab) = w(ba)$.

(e) Car $w(a)$ est l'ordre du sous groupe $\{a^z, z \in \mathbb{Z}\}$ de G. Il suffit alors d'appliquer le théorème de LAGRANGE (L'ordre d'une sous groupe divise l'ordre du groupe).

Eq mat Trace

(351)

Résoudre dans $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$ l'équation X+(tr X)A=0.

(voir aussi Tauvel 33 et spm1 p 81)

On généralise (la solution n'est pas plus difficile) avec un second membre B ; On prend la trace des deux membres $Tr(X + tr(X)A) = tr(X)(1 + tr(A)) = tr(B)$.

■ Si $Tr(A) \neq -1$ alors $Tr(X) = \frac{Tr(B)}{1+Tr(A)}$ et nécéssairement $\boxed{\mathbf{X = B - \frac{Tr(B)}{1+Tr(A)}A}}$ On vérifie qu'elle convient : c'est l'unique solution.

■ Si $Tr(A) = -1$ et $Tr(B) \neq 0$ il ny a pas de solution.

■ Si $Tr(A) = -1$ et $Tr(B) = 0$, on sait que si X est solution, X est de la forme $B + tA$; mais $tr(B + tA) = -t$ et finalement les solutions sont constituées des matrices de la forme $B + tA$, $t \in \mathbb{R}$.

M positive

(375)

Soit A une matrice symétrique positive dont les termes non diagonaux sont strictement négatifs. Montrer que rang(A) $\geq$ n − 1

(Solution Carpentier 6 mars 02)

$A = (a_{i,j})$ positive d'ordre $n \geq 2$.

Si $a_{i,i} = 0$ alors pour tout j $a_{i,j} = 0$ à cause de l'inégalité de Schwarz, ce qui est exclu. Donc pour tout i $a_{i,i} > 0$.

Soit q la forme quadratique associée à A : par réductionde GAUSS $q(x) = \frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_j a_{i,j}x_j\right)^2 + q_1(x_2, ..., x_n)$.

On constate que q_1 est aussi positive et les doubles produits $2a_{1,j}a_{1,k}$ étant positifs les coefficients "rectangles" de q_1 sont eux aussi strictement négatifs.

On peut donc raisonner par récurrence sur n :

Si $rg(q_1) \geq (n-1)-1$ il vient $rg(q) = rg(A) \geq (n-1)$. Le départ de la récurrence pour $n = 1$ (trivial) ou $n = 2$. $q(x) = a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2$ de rang $\geq n-1 = 1$ puisque $a_{1,2} \neq 0$.

★ Concave

(O 376)

Soient A et B deux matrices symétriques réelles et, pour t réel, f(t) la plus petite des valeurs propres de A+tB. Montrer que f est concave.

(Solution Carpentier 6 mars 02)

$f(t)$ est la plus grande valeur λ telle que $(A + tB - \lambda I)$ soit positive.

☐ $A+tB-f(t)I \geq 0$ et $A+uB-f(u)I \geq 0$ donc pour $\lambda \in [0,1]$ $\lambda(A+tB-f(t)I)+(1-\lambda)(A+uB-f(u)I) \geq 0$ (somme de deux matrices positives) ; soit $A + (\lambda t + (1-\lambda)u)B - (\lambda f(t) + (1-\lambda)f(u))I \geq 0$. Ce qui entraîne que $f(\lambda t + (1 -_l ambda)u) \geq \lambda f(t) + (1-\lambda)f(u)$ donc f est concave.

EF

(O 385)

Trouver les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x\ \mathbf{f(-f(x)) = x}$.

Voir Berge graphes et hypergraphes (Dunod 1970) Rufus isaacs p 37 et Equation de Cayley Manger AMM novembre 1981 ; voir aussi OIM 1983)

(Solution Carpentier 6 mars 02)

Il n'existe pas de solution continue à cetté équation fonctionnelle. En effet $f(-f(x)) = x$ entraine f surjective et injective. f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$.

La relation peut s'écrire $-f(x) = f^{-1}(x)$. Le graphe G de f a donc même symétrique par rapport à Ox et par rapport à $x = y$: il est donc invariant dans les rotations de $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent $f(-x) = -f(x)$: f est impaire.

Prenant $x = 0$: $f(0) = 0$: donc pour tout $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ (car f est injectif la valeur 0 est prise une seule fois).

Prenant $x = 1$ on a par exemple $a = f(1) > 0$. Alors $f(a) = -1$ et sur $[a, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x' tel que $f(x') = 0$ ce qui est impossible.

EF Corominas

(O 386)

Soient f et g continues de $[0,1]$ dans lui même, telles que $\mathbf{f \circ g = g \circ f}$. Montrer qu'il existe $\mathbf{x_0} \in [0,1]$ tel que $\mathbf{f(x_0) = g(x_0)}$.

(Solution Carpentier 6 mars 02)

Supposons que la propriété n'ait pas lieu. On a donc par exemple $\forall x\ f(x) < g(x)$. (coninues et th des VI).

Considérons $X = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$: il est non vide car $f(0) \leq 0$ et $f(1) \leq 1$; C'est un fermé donc il admet un maximum a. On a $g \circ f(a) = f \circ g(a)$ donc $g(a) = f(g(a))$ et $g(a) \in X$, ce qui est impossible car $g(a) > f(a) = a$.

PLANCHES

Planche 12 X-psi* : Courbe hérisson : Soit h une fonction réelle 2π−périodique de classe $\mathbf{C^3}$ et u l'application de R dans $\mathbb{R}^2$ qui à θ associe $((\cos\theta, \sin\theta)$. Soiut $\mathbf{D_\theta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \backslash((\mathbf{x}, \mathbf{u}(\theta)) = \mathbf{h}(\theta)\}$. (1) Montrer qu'il existe une courbe enveloppe à $\mathbf{D_\theta}$, c'est à dire une application dérivable x telle que $\mathbf{x}(\theta) \in \mathbf{D_\theta}$ et $\mathbf{x}'(\theta)$ est parallèle à $\mathbf{D_\theta}$. Donner une équation et la classe de cette courbe. (2) Préciser le vecteur normal à cette courbe en tout point. (3) Donner une condition nécéssaire pour qu'une courbe

donnée soit une courbe hérisson. (4) Étudier la convexité de la courbe Expliquer le pourquoi de "hérisson". Le reste est du cours sur les équation d'Euler ou normales de courbes. (1) l'intersection de D_θ et de la droite adjointe D'_θ conduit au système $\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta - h = 0 \\ -x\sin\theta + y\cos\theta - h' = 0 \end{cases}$; les formules de Cramer donnent $\boxed{\mathbf{z = x + iy = (h + ih')exp(i\theta)}}$ courbe C^2. (2) le vecteur normal est u' (3) Puisque $x' = -(h + h")\sin\theta$ et $y' = (h + h")\cos\theta$, on a la condition nécéssaire $\boxed{\mathbf{x'}\cos\theta + \mathbf{y'}\sin\theta = \mathbf{0}}$ (4) La théorie élémentaire de la concavité vers l'origine des courbes paramètrées donne $\boxed{h(h + h") > 0}$.

Planche 15 X-MP* : IRRÉDUCTIBLE : Soit $\mathbf{P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)^2 + 1}$ où les $\mathbf{a_k}$ sont des entiers relatifs (distincts) ; Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[\mathbf{X}]$.

Bib pour analogie et thème irréductible : Blocs 24, Br 89 p 214, Leboeuf p 21Tissier, Bonnault,)

Posons $T(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$; Raisonnons par l'absurde et supposons que le polynôme $1+T^2$ ne soit pas irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$: Il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{Z}[X]$ non constants tels que $1 + T^2 = AB$.

Cette égalité prouve que A et B n'ont pas de racines réelles $AB \geq 1$, on aurait $0 = 1$.

Comme $1 = A(a_k)B(a_k)$ et que $A(a_k)$ et $B(a_k)$ sont des ENTIERS, nécéssairement $A(a_k) = B(a_k) = \pm 1 = \varepsilon_k$, puisqu'entiers inversibles.

N'ayant pas de racines réelles A et B prenent nécéssairemnt la même valeur ε indépendante de k aux points a_k (ne peuvent changer des signe, car sinon d'après le théorème des valeurs intermédiaires ils auraient au moins une racine réelle).

Quitte à les changer aux besoin en leurs opposés, on peut supposer que $A(a_k) = B(a_k) = +1$, $k = 1..n$.

Écrivons la division euclidienne de A et B par T. $A = TQ + R$ et $B = TQ_1 + R_1$, avec $d°R$ et $d°R_1 < n$.

On a $A(a_k) = R(a_k) = 1$ et $B(a_k) = R_1(a_k) = 1$.

Les polynômes $R - 1$ et $R_1 - 1$ sont de degré $< n$ et ont n racines (distinctes, mais on pourrait faire intervenir les multiplicité) ; ils sont donc nuls : $R = R_1 = 1$.

Comme A et B sont non constants, Q et Q_1 ne sont pas nuls;

L'égalité $1 + T^2 = AB$ avec $A = TQ + 1$ et $B = TQ_1 + 1$ s'écrit $1 + T^2 = 1 + T(Q + Q_1) + T^2QQ_1$ ce qui aboutit à la constraction (comme $T = Q + Q_1 + TQQ_1$ par unicité de division euclidienne par T) $Q + Q_1 = 0$ et $QQ_1 = 1$ absurde avec des polynômes non constants dans $\mathbb{Z}[X]$.

Planche (31) Groupe : Soit G est un groupe d'élément neutre e, généré par a et b vérifiant $\mathbf{a^3 = e,\ b^2 = a,\ ab = ba^2}$. Quel est le cardinal de G ? *(cf GC Aub p 20 pour une généralisation ; Putnam 1976 B2 ; Tauvel, Chambert, Grappy 84,92 ;)* La dernière propriété équivaut en multipliant par a à gauche à $aba = b$;

La génération et les propriétés, font (immédiat) que $G = H = \{a^pb^q\}$ avec $q = 0..1$ et $p = 1..Z$ en tenant compte de l'ordre de a. Ce qui donne $\boxed{\textbf{card G=6}}$; les éléments de G étant $e, a, a^2; b, ab, a^2b$.

Planche 33 : Pour tout n il existe p tel que $\mathbf{(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p + 1}}$: Lien avec PELL FERMAT, voir aussi des idées analogues dans les ronéos de TAUVEL faits pour les agrégatifs de Poitiers Algèbre et arithmétique p 15 et 16.

On remarque $\begin{cases} n = 1 \quad (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{1} + \sqrt{1 + 1}\ p = 1 \\ n = 2 \quad (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{8} + \sqrt{9}\ p = 8 \\ n = 3 \quad (1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2} = \sqrt{49} + \sqrt{501}\ p = 49 \end{cases}$

Un récurrence immédiate donne $(1 + \sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$ avec $u_0 = 1, v_0 = 0,\ u_1 = 1, v_1 = 1,\ u_2 = 3, v_2 = 2,\ u_3 = 7, v_3 = 5$; et par récurrence $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$.

Et comme $1, \sqrt{2}$ sont $\mathbb{Q}$−libres, l'identification $z_n = (1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^n$ donne $u_{n+1} = u_n + 2v_n$ $v_{n+1} = u_n + v_n$; Et une récurrence immédiate donne $u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n$;

On peut aussi poser, si $z = a + b\sqrt{2}$, $N(z) = z\overline{z} = a^2 - 2b^2$; avec $\overline{z} = a - b\sqrt{2}$ et constater que N est multicative ; et on peut pour résoudre la planche faire une récurrence ; mais il est beaucoup plus direct de remarquer que $z_n = u_n + v_n\sqrt{2} =_{\text{“j'ai rien changé”}} \sqrt{u_n^2} + \sqrt{2v_n^2} = \sqrt{u_n^2} + \sqrt{u_n^2 - (-1)^n}$: si c'est pas l'un c'est l'autre ! Si n est pair $p = u_n^2 - 1$ sinon c'est u_n^2.

Planche 34 X-PC : Soit A une matrice carrée symétrique à coefficients réels, Montrer qu'il existe M triangulaire supérieure telle que $\mathbf{A = {}^tMM}$.

(Solution de Christian Devanz 12 mars 02)

PLANCHE 34 (A FAIRE EN RESPECTANT LE PROG. PC: donc orthogonalisation de GAUSS inconnue des élèves) Je choisis de montrer par récurrence l'existence de T triangualaire inférieure telle que $S = tranp(T).T$, lorsque S est symétrique positive. On notera $Q(X) = transp(X).S.X$ qui est positive pour tout X de R^n.

$n = 1$ OK

■ Si vrai $n-1$ et si $S_{n,n} = 0$ alors les $S_{i,n}$ sont nuls : exploiter $Q(0,0,x_i,0,0,...1) \geq 0$ qui doit être vrai pour tout réel x_i. Alors $Q(X) = q(x_1, ...x_{n-1})$ et on exploite H(n-1).

■ Si vrai pour n-1 et $S_{n,n}$ non nul (nécessairement > 0 alors vu $Q(0,0,...1)$) alors en complétant un carré on a $Q(X) = L(X)^2 + q(x_1, ...x_{n-1})$, où L est une forme linéaire où le coefficient de x_n est > 0.

En se limitant a des X tels que $X\#= transp(x_1, x_{n-1})$ est quelconque et x_n choisi pour que $L(X) = 0$(ce qui a est licite vu que dans L le coeff devant $x_n$est > 0) on a que $q(x_1, ...x_{n-1}) = transp(X\#).s.X\#$ est positif pour tout $X\#$ de $R^(n-1)$, où s est symétrique d'ordre $n-1$. H(n-1) fournit alors t triang inf de taille $n-1$, telle que $s = transp(t).t$ et pour en déduire T, il n'y a plus qu'à rajouter une dernière ligne consituée des coeff de L (et des 0 en positions i, n, si i distinct de n).

Planche 35 : xPC : Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien on considère (H) d'équation $\mathbf{xy = k^2}$ avec $\mathbf{k > 0}$ et (C) le cercle de centre $\mathbf{\Omega(a,b)}$ et de rayon $\mathbf{R > 0}$. Déterminer un polynôme $\mathbf{P \in \mathbb{R}_4[X]}$ tel que la tangente à (H) au point $\mathbf{M(x, \frac{k^2}{x})}$ (avec $\mathbf{x \neq 0}$) soit aussi tangente à (C) si et seulement si P(x)=0.

À quelle condition le degré de P est-il < 4 ? On suppose que cette condition est vérifiée et que, de plus (H) et (C) sont tangents. Déterminer alors les tangentes communes à (H) et (C).

(Solution de Christian Devanz (PC Saint-Louis Paris, 12 mars 02)*

Je ne vois pas cet exo comme très géométrique, sauf qu'on peut visualiser les calculs et les figures avec Maple -ce que j'ai fait...- (mais pas disponible à l'oral de l'X !!)

Voici un abrégé de mes résultats, mais voici d'abord l'énoncé, auquel je rajoute : $b > 0$.

Soit $k, b, R > 0$, 1) Déterminer P de degré ≤ 4 tel que la tangente à $xy = k^2$ au point d' abscisse x est tangentee à $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ SSI $P(x) = 0$. 2) Quand a-t-on $degP < 4$? On suppose ceci désormais et que l'hyperbole et le cercles sont tangents. Déterminer les tangentes communes aux deux coniques.

SOLUTION : 1) l'équation aux abscisses X entre tangente à hyperbole et cercle est de degré 2 : on exprime que son discrimant réduit est nul d'où la liste suivante des coefficients de P en partant du coefficient en degré 4 $(R^2 - b^2, 4bk^2, -2k^2(2k^2 + ab), 4ak^4, k^4(R^2 - a^2))$

2) $R = b$. On écrit les relations entre coefficients et racines sur P(x)=0, en appelant x,x,x' les racines. (—ce n'est pas une faute de frappe—–) Après calculs , mais sans exploiter l'équation additionnelle $(x^3)*(x-a)-k^4+R*k*k*x = 0$ j'arrive à (non, je ne l'avais même pas fait avec Maple!!!) ... $x = (-7*a^2*k*k*R + 9*R^3*k^2 + 4*k^4*a)/(2*R^2*a^2 + 8*k^4 - 16*a*R*k*k)$ (et x' tq $2x + x' = a/2 + k^2/R$) Les deux droites tangentes sont alors $x^2.Y = k^2(2x - X)$ et $x'^2.Y = k^2(2x' - X)$

(photocopie du programme en Maple)

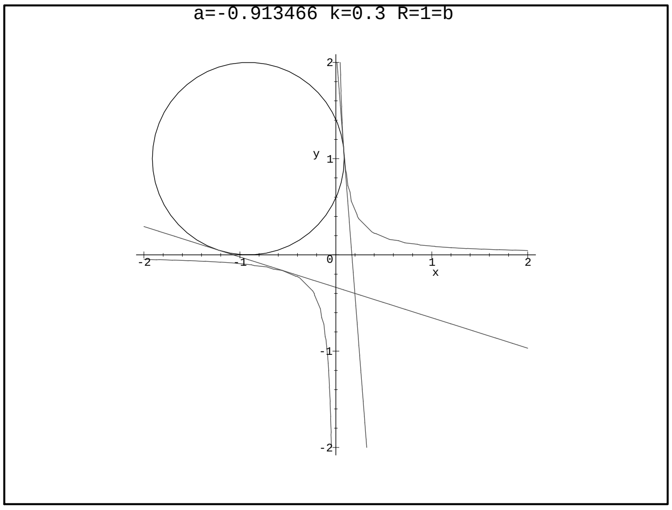


Planche (38) **Intégrales et séries :** (c'est PUTNAM 1969 exercice A4, Voir Br 84 p 121)

Planche (39) : si $\sqrt{an^2 + bn + c} \in \mathbb{N}$ pour n assez grand alors $an^2 + bn + c = (un + v)^2$ avec $u, v \in \mathbb{N}$: On suppose maintenant que si $\sqrt{an^2 + bn + c} \in \mathbb{Q}$ pour n assez grand alors $an^2 + bn + c = (un + v)^2$ avec $u, v \in \mathbb{Q}$.

(cas 1) Si $a = b = 0$ $\sqrt{c} \in \mathbb{Z}$ donc c est un carré.

(cas 2) Si $a = 0$, $b \neq 0$: je me ramène au (cas 3) en remplaçant n par n^2... MP1.

(cas 3) Si $a \neq 0$; On fait un développement limité : Le comportement à l'infini oblige $a > 0$ pour que le radical ait un sens ;

$f(n) = \sqrt{an^2 + bn + c} = \sqrt{a}n(1 + \frac{b}{2an} + (\frac{c}{2a} - \frac{b^2}{8a^2})\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

$f(n+1) - f(n)$ entier tend vers $\sqrt{a}$ qui est donc entier (ne marche plus pour $\mathbb{Q}$) Donc $a = a_1^2$

Entier $= a_1 n + \frac{b}{2a_1} + o(1)$; pour la même raison $E - na_1$ entier tend vers un entier. Donc $b = 2a_1 k$;

En multipliant cette fois les deux membres par n on a par la même méthode $\frac{c}{2a_1^2} - \frac{b^2}{8a_1^4} = \frac{c}{2a_1^2} - \frac{k^2}{8a_1^2}$ limite d'entier, est entier, et comme il tend vers zéro il est nul et $an^2 + bn + c = a_1^2 + 2ba_1 kn + k^2 = (a_1 n + k)^2$.

(Renaud Palisse le 17 mai 02) remarque : Je ne vois pas pourquoi l'entier ci dessus tend vers zéro... Pas grave : $P(n) = (a_1 n + k)^2 + E = q_n^2$ où E est le fameux entier ; $E = (q_n - a_1 n - k)(q_n + a_1 n + k)$ admettant une infinité de diviseurs, il est nul !

Le raisonnement ne semble (cette fois on travaille sur un ensemble dense) ne plus être valable sur pour $\mathbb{Q}$.

(Solution de (b) Par Michel Quercia ll mars 2002 22h23)

Soit $an^2 + bn + c = r_n^2$ avec r_n rationnel.

En prenant trois valeurs de n distinctes, on peut calculer les coefficients a, b, c par interpolation de LAGRANGE donc ils sont rationnels. Ensuite, on peut multiplier a, b, c par un carré d'entier sans changer le problème donc on peut supposer a, b, c entiers auquel cas r_n est lui aussi entier et on est rammené au premier cas.

(Solution de (b) par Hugdemonge Eiffel Dijon 12 mars 02)

À partir d'un certain rang $an^2 + bn + c$ est élément de $\mathbb{Q}$ donc par différences successives $a, betc$ sont éléments de $\mathbb{Q}$ On multilpie par le PPCM des dénominateurs et on tombe sur un polynôme $P_1 = a'X^2 + b'X + c'$ à coefficients entiers qui vérifie la première condition Le résultat s'aplique à P_1 puis à P.

(Solution de Chardard Robert 13 mars 02)

On commence d'abord par remarquer que a, b, c sont dans $\mathbb{Q}$ puisque, pour un certain entier p : $ap^2 + bp + c$, $a(p+1)^2 + b(p+1) + c$ et $a(p+2)^2 + b(p+2) + c$ sont dans $\mathbb{Q}$.

On choisit ensuite un entier q tel que $q^2 a$, $q^2 b$, $q^2 c$ soient entiers (on notera ces trois entiers A, B, C). Alors, pour n assez grand, la racine carrée de $An^2 + Bn + C$ est à la fois un rationnel et la racine carrée d'un entier ... donc un entier. On est ramenés à la première question ...

VRAC-flash

: Les indications sont brèves et ne constituent pas une rédaction mais une idée de la méthode ; aussi c'est à vous de rédiger et de tout expliquer et justifier quand vous passez au tableau : Il ne faudra vous en prendre qu'à vous même de ne pas avoir assez approfondi : on pourra alors vous reprocher d'être une vraie moule...

signifie que la solution est photocopiée dans une des références.

(9) **Norme et similitude :** Voir RMS juin 95 numéro 230 page 774-776, + juin 94 ; Voir aussi Bloc Vuibert Algèbre p 153 ; bréal 87 ; O 98-204 ; voir TP MP1 ; Voir aussi Chambert-Loir ;

(19*) **Produit infini fonctionnel :** (O99 48 juin 2000 p 1072, et 438 juin 97)

(43-239) **équation cofacteur :** (Leichtnam 77)

(45+81) Union d'espaces : *(voir ronéo du cours MP1)*

(48) Suite croissante majorée de matrices : *(Blocs 120 et juin 95 p 737)* Avec des notations évidentes $Q_n(x) \leq Q_{n+1}(x)$ et $Q_n(x) \leq R(x)$ pour chaque x fixé ; $Q_n(x)$ croissante majorée dans $\mathbb{R}$ converge vers $q(x)$; reste à prouver que q est bien une forme quadratique, par passage à la limite dans l'identité de polarisation de Q_n : Une forme bilinéaire symétrique S_n tend vers une forme bilinéaire symétrique (expliquer) ; Les a_i^j de la matrice A de q sont les limites des $S_n(e_i, e_j)$.

(55) Viete : *(voir O2000 107 vrac)* Constater que $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$, diviser x à chaque fois par 2 en partant de $x = \frac{\pi}{4}$. *(voir le cours et les exos sur les produits infinis)*

(73) décomposer : En faisant apparaître les facteurs premiers on a $4^a 5^a 8^b 3^b 5^2 c 3^{3d} = 2^{2a+3b} 3^{b+3d} 5^{a+2c} = 1$ et par unicité de la décomposition de 1 on a $1a + 3b = 0,\ b + 3d = 0,\ a + 2c = 0$ soit $a = -2c,\ b = -3d,\ a = 3k,\ b = -2k$ et par Gauss : $c = 3c',\ d = 2d',\ a = -6c',\ b = -6d'$.

On a un système homogène, de rang $\leq k-1$ à k inconnues $a_1, ..., a_k$ toujours compatible avec une solution non banale.

Pour (c) Il suffit de prendre $k = 4$ $n_1 = 2 * 3$, $n_2 3 * 4$, $n_3 = 5 * 7$, $n - 47 * 2$ et $a_1 = a_3 = -a_2 = -a_4 = 1$, pour se convaincre que la condition n'est pas suffisante. Peut-on établir un lien avec le codage ?

(75) Inégalité : On remarque que l'effet d'une rotation sur les deux nombres complexes, ne change pas l'expression : on peut supposer a réel ; le rapport donné R devient $\frac{a-b}{1-ab}$ a et b ont des roles identiques ; on peut supposer à un échange près que $k = \frac{b}{a} = te^{iu}$ avec $0 \leq t \leq 1$; On divise numérateur et dénominateur par a (le cas $a = 0$ étant banal) ; alors $R = \frac{1-k}{1/a-ak}$; alors $|R|^2 = \frac{1+t^2-2t\cos u}{1/a^2+a^2-2t\cos u}$; enfin $|R|^2-1$ est du signe de $1+t^2-2t\cos u - \frac{1}{a^2} - a^2 + 2t\cos u = \frac{1}{a^2}(1-a^2)(a^2t^2-1) < 0$; Interpréter géométriquement en faisant une figure.

Un autre point de vue est le suivant : On démontre (Râmis exercices d'algèbre Masson p62 ; Bass 584 ; Andler 1 ; Leichtanm p32) que les fonctions homographiques qui conservent les nombres complexes de module 1 sont définies par $h(z) = e^{it}\frac{1}{z}$ ou $h(z) = e^{it}\frac{z-b}{1-\overline{b}z}$.

Cela se démontre en cherchant $z' = \frac{az+b}{cd+d}$ qui transforment le cercle $z\overline{z} = 1$ en le cercle $z'\overline{z'} = 1$; ce qui s'écrit $(az+b)(\overline{az}+\overline{b}) = (cz+d)(\overline{cz}+\overline{c})$;

En identifiant pour tout z on a $a\overline{b} = c\overline{d}$ et $a\overline{a} - c\overline{c} = d\overline{d} - b\overline{b}$;

Comme $1 - z'\overline{z'} = \frac{(d\overline{d}-b\overline{b})(1-z\overline{z})}{|cz+d|^2}$, on a donc $d\overline{d} - b\overline{b} > 0$, pour la conservation du disque unité.

On a alors $a \neq 0$ et $d \neq 0$. On a aussi $\frac{c}{a} = \frac{\overline{b}}{\overline{d}} = \overline{\lambda}$ avec $|\lambda| < 1$; De cela on déduit $|a| = |d|$.

D'où $h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}\left(\frac{z+\lambda d/a}{1+\overline{\lambda}a/dz}\right) = e^{it}\frac{z+z_0}{1+z\overline{z_0}}$ où $t \in \mathbb{R}$ et $|z_0| < 1$.

les automorphismes homographiques conservant le disque unité sont donc $\mathbf{h(z) = e^{it}\frac{z+z_0}{1+z\overline{z_0}}}$

On prend $z_0 = b$ et cet automorphisme transforme bien un point a intérieur au cercle en un point $h(a)$ intérieur au cercle !

(Solution de Jean Pierre Desnoux MP St Louis 15 mars 2002) Si $c = |\frac{a-b}{1-\overline{a}b}$, on a aussitôt (réduction au même dénominateur): $|c|^2 - 1 = \frac{(|a|^2-1)(|b|^2-1)}{|1-\overline{a}b|^2}$, ce qui achève la preuve. Exercice proposé dans Ramis-Odoux-Deschamps, Tome I, exercice 5.11. page 114 (ce qui ne nous rajeunit pas).

---

(77) Racines réelles : *(voir un autre aspect Leichtnam p47)* On utilise les formules d'Euler, on sépare et on obtient $(e^{it}x+1)^n = (e^{-it}x+1)^n$ soit $e^{nit}(x+e^{-it})^n = e^{-nit}(x+e^{it})^n$, soit $\left(\frac{x+e^{-it}}{x+e^{it}}\right)^n = e^{-2int}$; En prenant le module des deux membres x est sur la médiatrice du segment $[e^{-it}, e^{+it}]$ dont les extrémités sont sumétriques par rapport à l'axe Ox, sont est réel. Si on veut préciser $x + e^{-it} = S(x+e^{it})$ où $S = e^{-2it+\frac{2k\pi}{n}}$ soit $x = \frac{Se^{it}-e^{-it}}{1-S} = ... = -\frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{\sin(-t\frac{k\pi}{n})}$.

(94) sommation : (voir solution détaillée et solution photocopiée Maple)

(95) EF : (OIM 92 Moscou editions du choix) **(133) Somme style Gauss-Lucas :** Lez racines de l'unité utilisées, sont celles de $P = \frac{z^n-1}{z-1}$; On constate que $S = \frac{P'}{P}(1) = \frac{2+..+n-1}{n} = \frac{n^2-n-1}{2n}$.

(137) $\mathbf{M^5 = M^2}$: Un polynôme annulateur est $X^2(X^3-1)$; les valeurs propres ne peuvent être que 0 et 1 ; jamais 0 à cause de la trace n ; donc M est inversible et $X^3 - I$ est annulateur avec que des racines simples.

(140) Trace entière : $X(X-1)^2$ est annulateur ; les valeurs propres possibles sont 0 ou 1, entières ; la trace l'est donc aussi. Si la trace est nulle, il n'y a que 0 comme valeur propre $M - I$ est régulière ainsi qwue $(M-I)^2$; X est annulateur, la matrice est nulle ; Si la trace est n il n'y a que 1 comme valeur propre M est inversible ; $(X-1)^2$ est annulateur ; $M - I$ est nilpotente d'ordre 2 ; Si $n = 1$ $M = I$ sinon $M = I + J$ où J est la matrice de JORDAN réduite à un $a_{1,n} = 1$.

(141) Somme directe : $z(z^2 - 3az + a^2)$ est annulateur ; de racines distinctes $0, s, t$ avec $st \neq 0$; D'après le théorème de somme directe des noyaux E est la somme directe de E_0 et E_s et E_t ; le premier est le noyau ; la somme directe des deux autres est l'espace image.

(156) valeur propre commune : (Leichtnam 158+ 139)

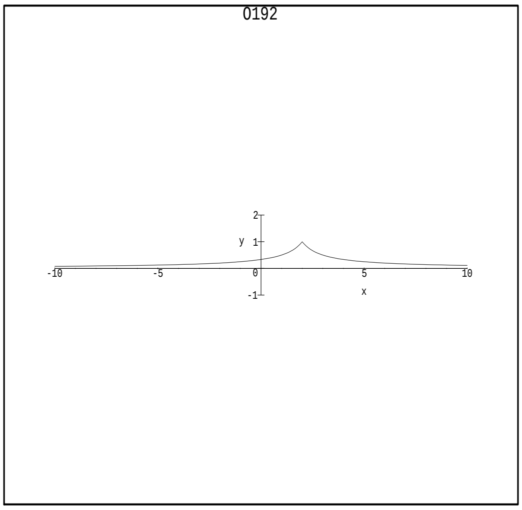
(165) Complet, Point fixe, équation fonctionnelle : Montrer que pour chaue t fixé, $tf(t)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, que la limite est bien une fonction continue bornée, et qu'il y a bien convergence au sens de la norme (voir TD 20 la méthode est donnée et ronéo topologie pour LC(E,F) ; $|t\ g(t)| \leq \frac{1}{6}|\frac{t}{2}f(\frac{t}{2})| + \frac{3t}{3}|f(\frac{t}{3})| \leq \frac{5}{6}N(f)$.

φ est $\frac{5}{6} < 1$ contractante dans E complet donc admet un point fixe unique qui est la solution de l'équation fonctionnelle $f(t) = \frac{1}{6}f(\frac{t}{2}) + \frac{1}{6}f(\frac{t}{3})$.

(176) Série : En étudiant $f(x) = x^2 + (n-k)^2$ (comme dans le produit de deux séries convergentes pour diverger...) on montre que $\frac{n^2}{2} \leq f(x) \leq n^2$ donc $\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^\alpha \leq u_n \leq \left(\frac{2(n+1)}{n^2}\right)^\alpha$; à une constante multiplicative près les deux encadrants sont de l'ordre de $\frac{1}{n^\alpha}$ d'où la même discussion que pour les séries de Riemann.

(185)+(410) Série $\mathbf{x^{n^2}}$: voir ronéo (photocopié en annexe) TD série : comparaison série et intégrale.

(191) CD, et limite intégrale :) La fonction converge simplement vers $\frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$, vers 0 après ; On ne peut dominer sur $]0,1[$, la fonction restant supérieure à sa limite partout. Mais comme $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{t}}$ converge par Riemann On vérifie que $|\int_0^b f_n - \int \frac{1}{\sqrt{t}}| \leq \int_0^b t^n \frac{1}{t\sqrt{t}} \leq C\frac{1}{n-1/2} \to 0$. La limite dépend de la position de 1 par rapport au segment $[a,b]$. Discuter.



(192) CU, intégrales et Schwarz) (a) Maple donne ; $x = n$ est axe de symétrie. On a $f_n^2 \leq \frac{1}{1+(x-n)^2 \sim 1/(x-n)^2}$ dont l'intégrale (du type Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ converge aux deux bornes) ; Le changement de variable $u = x-n$ et la symétrie constatée, donne $\int_{\mathbb{R}} f_n^2 = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = 2\left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^{+\infty} = 2$.

(b) Soit $[a,b]$ l'intervalle en question avec $a \leq b$; on peut supposer $n \geq n_0 = [b]+1$ alors $0 \leq m_n = \frac{1}{1+n-b} \to 0$. C'est bien une caractérisation de la convergence uniforme demandée.

(c) Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$\int_I |f_n g| \leq \sqrt{\int_I f_n^2 \int_I g^2} \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f_n^2 \int_{\mathbb{R}} g^2} = \sqrt{2\int_{\mathbb{R}} g^2}$ ce qui démontre l'absolue, puis la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f_n g$ puisque $\mathbb{R}$ est complet. De plus comme $(f_n - g)^2 \geq 0$ on a la DOMINATION $|f_n g| \leq \frac{1}{2}(f_n^2 + g^2)$ dont l'intégrale converge ! par le théorème de la convergence dominée on peut donc permuter limite et intégrale, et comme f_n tend simplement vers 0, la limite de $\int_{\mathbb{R}} f_n g$ est 0. *(cet exercice est le même que O2000 198* rms juib 01 p1056)*

(193) Équivalent intégrale : Par convergence dominée CD on obtient $\ell = \int_0^1 dt = 1$ puis dans $I_n - \ell$ on fait le changement de variable $u = t^n$ qui conduit à $I_n - \ell = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}} du}{1+\sqrt{1+u}}$. À nouveau le théorème de la CD justifie que $I_n - \ell \sim \frac{1}{n} int_0^1 \frac{du}{1+\sqrt{1+u}} = \frac{A}{n}$. Le changement de variable $1+u = v^2$ conduit à $A = \int_1^2 \frac{2v dv}{1+v} = 2 - 2\ln\frac{3}{2}$.

(194) Équivalent intégrale : Le changement $u = t^n$ dans l'intégrale, le développement en série entière de $\ln(1+u)$ et la permutation (à justifier) de l'intégrale et de la sommation donne $\mathbf{L} = \frac{\pi^2}{6}$.

(195) Série à terme intégral : Une IPP donne $(1 - \frac{3}{4n})I_n = I_{n+1}$; L'utilisation du th de CD donne la limite 0. Puis le critère de GAUSS (avec $\beta = \frac{3}{4} < 1$ donne la divergence de $\sum I_n$.

(196) Limite d'intégrale CD : Il y a une coquille dans l'énoncé il faut lire $I_{n-1} > I_n$ et non $I_{n+1} > I_n$: On constate que $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \leq 1$ ce qui donne le résultat demandé par positivité de l'intégrale, après multiplication par $\frac{1}{(1+x)(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n-1})}$ et intégration. *(voir les analogies avec O84 55* rms juin 95 p 720)*

La fonction f_n sous le signe somme vérifie $f_n(0) = 1$ et comme son dénominateur est $D_n(x) = 1 + x(H_n) + \dots > 1 + xH_n \to +_infty$ pour $x > 0$ où H_n est la somme partielle d'indice n de la série harmonique, $f_n(x) \to 0$ pour $x > 0$. La limite de I_n est donc 0 par le théorème de convergence dominée CD ou même monotone (CM).

(197) Produit scalaire et limite de coefficients de "Fourier" : (a) Bilinéarité de l'intégrale et positivité de l'intégrale des fonctions continue, le poids k ayant au moins un intervalle (voisin de 1) où il est > 0. (b) Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT. (c) Φ est limite uniforme d'une suite S_j polynômes (de degrés d_j). Or pour $n > d_j$ $(S_j|P_n) = 0$: il suffit d'écrire (détailler proprement $\varepsilon > 0$, $\exists j(\varepsilon)$ tel que $||\Phi - S_{j(\varepsilon)}|| < \varepsilon$ et $n > d_j$.) : $|(\Phi|P_n)| =_{\text{"j'ai rien changé"}} |(\Phi - S_j + S_j|P_n)| \leq_{\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}} ||\phi - S_j||\ ||P_n|| =_{\text{BON}} ||\phi - S_j|| < \varepsilon$ d'où la limite 0 demandée.

(217) Solution maximale : (Br 94 p 110, O97 252, rms juin 96 p 892, analogues Br 95 p 135, juin 97 p 832, GC Lepez, Juin 98 271, voir aussi TP Mp1 et Zuily)

O95 146 **(222) Courbe telle que $\theta + 2\mathbf{V} = 0$:** Comme $\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$ on aboutit à $\frac{\rho'}{\rho} = -\tan\frac{\theta}{2}$; en intégrant $\rho = \frac{C}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{C}{1-\cos\theta} = \frac{ed}{1+e\cos(\theta-\alpha)}$. On reconnaît une parabole de foyer O et d'axe Ox.

(278) Limite : *(Br 96 p 19)* On prend le ln, on fait un développement limité, en $\frac{1}{n}$, on trouve $u_n \to exp(\frac{\pi\sqrt{3}}{24})$.

(356) rang pair : $X(X^2+X+1)$ est annulateur, avec que des racines simples ; les valeurs propres possibles sont $0, j, j^2$; mais comme le polynôme caractéristique est à coefficients réels j et j^2 racines complexes conjuguées ont la même multiplicité p ; le rang est pair et égal à $2p$.

(357) Déterminant : *(voir le lien avec Planche 182 II, Br 96 p175, pour min : 132*, Grunspan 58, Br 97 p160)* En retranchant les lignes "à reculons" on trouve $P(a_i) = a_i A_i$ où si $S = (X-a_1)....(X-a_n)$, A_i est $S'(a_i)$ ou si l'on préfère : on enlève dans S le facteur $(X-a_i)$ et on spécialise $X = a_i$. Ainsi $P(a_i) = a_i S'(a_i)$. Dans le cas où deux a_i sont égaux $P(a_i) = 0$ (deux colonnes égales). Dans le cas où ils sont distincts (sinon on peut en déduire le résultat général par continuité) la fraction rationnelle proposée a comme décomposition en éléments simples $1 + \sum \frac{P(a_i)}{S'(a_i)(X-a_i)} = 1 + \sum \frac{a_i}{X-a_i}$. Donc $P = S + \sum a_i S_i$ où $S_i = \frac{S}{X-a_i}$.

(411) Somme de série entière : Le rayon est 1 par d'Alembert. En écrivant $\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$ et en multipliant et divisant par x ou x^2 pour retrouver la série entière de $\ln(1-u)$ on a rapidement $f(x) = \frac{1}{2x}(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}) + \frac{x}{2}(-\ln(1-x)) - x^2\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2x^2}\big(\ln(1-x^2) + x^2 + \frac{x^4}{2}\big)$. On regroupe et on regarde : pour $x = 1$ divergence (série harmonique) et pour $x = -1$ Abel et série Harmonique alternée.

(412) Série de fonction : Par domination normale $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$ la somme est donc continue et paire ; Comme il y a domination normale sur tout segment de $\mathbb{R}$, de $|u'_n(x)|$ par $\frac{2n^2x}{(n^4+n^2x^2)^2} \leq \frac{2K}{n^7}$; la somme est C^1 sur $\mathbb{R}$. De dérivée négative sur $\mathbb{R}_+$ elle y décroit de 1 à 0.

(415) Intégrale et série ZETA : Râ et Bréal divers et TP : on écrit $1 + t + ... + t^n = \ln\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ qu'on prolonge par continuité en $t = 1$; on ne sépare pas tout de suite (pb en $+1$) on est ramené à $(\frac{1}{n+1} - 1)\int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)dt$ on a le droit de permuter somme et intégrale, par CD ou reste tendant vers 0. En intégrant terme à terme on trouve $(\frac{1}{n+1} - 1)\frac{\pi^2}{6}$.

(420) Fonction intégrale : un grand classique dans TP et tous livres Râ : limite aux bornes par l'utilisation intelligente de formule de la moyenne et encadrement ; limite en 1 ayant ayant l'idée de glisser le t voisin de 1 au dénominateur pour trouver une fonction "voisine" que l'on sait calculer $= \ln 2$.

(438) Projection : Soit directement, soit en calculant le déterminant (0) la trace (2) et la trace de la comatrice (1) pour avoir les coefficients du PC on trouve comme PC $-t(t^2-2t+1)$; $t = 1$ est double d'espace propre de dimension 2 le plan P d'équation $x + 2y + 3z = 0$ (prévu car la matrice est symétrique réelle donc ortho-diagonalisable) La transformation est la projection orthogonale par rapport à sur P.

(439) Rotation : La matrice est orhogonale droite (expliquer) : par la trace $1 = 1 + 2cos\theta$; donc $\theta = \frac{\pi}{2} + k_p i$. $A -^t A$ donne le vecteur de l'axe $\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$ (expliquer) avec l'angle $+\frac{\pi}{2}$. On a donc $A^4 = I$ ce qui n'était pas évident ou calculatoire à vérifier.