

**ULC 420**

SESSION 2004

---

**Filière MP (groupe I)**

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

---

**Filière PC (groupe I)**

Épreuve commune aux ENS de Paris et Lyon

**MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE**

---

Durée : 4 heures

---

L'usage de toute calculatrice est interdit.

**Tournez la page S.V.P.**

## Préliminaires

Pour tout ensemble fini  $E$  de cardinal  $k$ , on note  $\mathbb{R}^E$  l'espace vectoriel de dimension  $k$  des fonctions de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ . On note  $\hat{e}$  l'élément de  $\mathbb{R}^E$  qui est la fonction qui à  $e$  associe 1, et à tout autre élément de  $E$  associe 0. En particulier, tout élément  $a$  de  $\mathbb{R}^E$  s'écrit de façon unique  $\sum_{e \in E} a_e \hat{e}$ , pour une famille de coefficients  $(a_e)_{e \in E}$  — à savoir  $a_e = a(e)$  pour tout  $e \in E$ . Les vecteurs  $\hat{e}$ ,  $e \in E$  forment la *base canonique* de  $\mathbb{R}^E$ .

L'espace  $\mathbb{R}^E$  est muni d'un produit scalaire défini par

$$\left( \sum_{e \in E} a_e \hat{e} \right) \cdot \left( \sum_{e \in E} b_e \hat{e} \right) = \sum_{e \in E} a_e b_e$$

pour lequel la base  $(\hat{e})_{e \in E}$  est orthonormée. On note  $|v| = \sqrt{v \cdot v}$ .

On note  $0$  l'espace vectoriel de dimension 0. Il est réduit à l'élément 0.

On rappelle aussi que le *rang* d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^F$  est  $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^E - \dim \text{Ker } f = \text{card } E - \dim \text{Ker } f$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de même largeur, la matrice  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  est obtenue en plaçant toutes les lignes de  $A$  au-dessus de toutes les lignes de  $B$ .

Une *relation binaire* sur un ensemble  $A$  est un sous-ensemble de  $A \times A$ . Pour toute relation binaire  $\rightarrow$  sur un ensemble  $A$ , on notera  $x \rightarrow y$  si et seulement si  $(x, y)$  est dans  $\rightarrow$ . On notera d'autre part  $\rightarrow^*$  la relation définie par  $x \rightarrow^* y$  si et seulement s'il existe un entier  $k \geq 0$ , et  $k + 1$  éléments  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  de  $A$  tels que  $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k = y$ . La relation  $\rightarrow^+$  est définie par  $x \rightarrow^+ y$  si et seulement s'il existe un entier  $k \geq 1$ , et  $k + 1$  éléments  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$  de  $A$  tels que  $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_k = y$ .

La différence ensembliste  $\setminus$  est définie par  $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ . La différence symétrique  $\Delta$  est définie par  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

L'usage de la calculatrice est autorisé (et fondamentalement inutile). On pourra utiliser les résultats de questions précédentes même si on n'y a pas répondu.

# 1 Quelques calculs matriciels

**Question 1.1.** Soient  $v_1, \dots, v_{k-1}$   $k - 1$  vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^m$ , et supposons qu'ils sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire  $v_i \cdot v_j = 0$  pour tous  $i, j, 1 \leq i < j < k$ . Pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^m$ , montrer que

$$v' = v - \sum_{\substack{1 \leq j < k \\ v_j \neq 0}} \frac{v_j \cdot v}{|v_j|^2} v_j$$

est orthogonal à tous les  $v_i, 1 \leq i < k$ , et que de plus l'espace vectoriel engendré par  $v_1, \dots, v_{k-1}, v'$  est identique à celui engendré par  $v_1, \dots, v_{k-1}, v$ .

**Question 1.2.** On considère le programme suivant :

1. GS1( $A, m, n, k$ )
2.     **pour  $j$  de 1 à  $k - 1$  faire**
3.          $s := 0; x := 0;$
4.         **pour  $i$  de 1 à  $m$  faire**
5.              $s := s + A[i, j] \times A[i, k]; x := x + A[i, j] \times A[i, j];$
6.         **si  $x \neq 0$  alors pour  $i$  de 1 à  $m$  faire**
7.              $A[i, k] := A[i, k] - s \times A[i, j]/x;$

On supposera que  $A$  est un tableau de  $m$  lignes et  $n$  colonnes, et que  $1 \leq k \leq n$ . L'élément  $A[i, j]$  est donc défini pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ . La  $j$ ème colonne  $A[-, j]$  de  $A$  sera vue comme un vecteur  $v_j$ , et on supposera qu'en entrée de GS1, les vecteurs  $v_1, \dots, v_{k-1}$  sont orthogonaux deux à deux.

Que calcule GS1 ( $A, m, n, k$ ) ?

**Question 1.3.** Montrer que le programme

1. GS( $A, m, n$ )
2.     **pour  $k$  de 1 à  $n$  faire**
3.         GS1 ( $A, m, n, k$ )

remplace le tableau  $A$  de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  par un tableau de  $n$  vecteurs orthogonaux engendrant le même sous-espace vectoriel.

Montrer que la complexité de GS ( $A, m, n$ ), c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires (affectations et opérations arithmétiques) effectuées par GS ( $A, m, n$ ), est en  $O(n^2m)$ .

**Question 1.4.** Pour toute matrice  $A$  de  $m$  lignes et  $n$  colonnes, en déduire qu'on peut calculer  $\dim \text{Ker } A$  en  $O(n^2m)$  opérations élémentaires.

**Question 1.5.** En considérant la transposée  $A^t$  de  $A$ , en déduire que l'on peut calculer  $\dim \text{Ker } A$  en  $O(m^2n)$  opérations élémentaires.

**Question 1.6.** En déduire un algorithme, fondé sur les algorithmes des questions précédentes, calculant  $\dim \text{Ker } A$  en  $O(\min(m, n)^2 \max(m, n))$  opérations élémentaires.

## 2 Complexes simpliciaux et homologie

On appelle *complexe simplicial* tout triplet  $(V, \leq, K)$ , où  $V$  est un ensemble fini de *sommets*,  $\leq$  est un ordre total sur  $V$ , et  $K$  est un ensemble de parties non vides de  $V$ , vérifiant la condition :

(†) si  $\alpha \in K$  et  $\beta \subset \alpha$ ,  $\beta \neq \emptyset$ , alors  $\beta \in K$ .

On notera souvent  $K$  le complexe simplicial  $(V, \leq, K)$ , par abus de notation. On notera  $x < y$  si et seulement si  $x \leq y$  et  $x \neq y$ .

Les éléments  $\alpha$  de  $K$  sont appelés les *simplexes* de  $K$ . La *dimension*  $\dim \alpha$  est par convention  $\text{card } \alpha - 1$ . En particulier, la dimension de tout simplexe de la forme  $\{x\}$  est 0.

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $K_p$  l'ensemble des simplexes de dimension  $p$  de  $K$ .

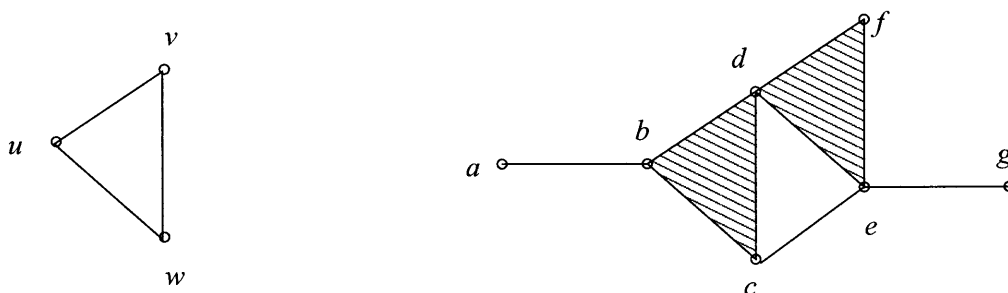


FIG. 1 – La représentation graphique d'un complexe simplicial

La relation  $\sqsubset^+$  dénote l'inclusion stricte entre simplexes :  $x \sqsubset^+ y$  si et seulement si  $x$  est strictement inclus dans  $y$ ; on dit alors que  $x$  est une *face* de  $y$ . Par exemple,  $\{b, c\}$  est une face de dimension 1 de  $\{b, c, d\}$ . On dit que  $x$  est une *face directe* de  $y$ , et l'on note  $x \sqsubset y$  si et seulement si  $x$  est une face de  $y$  et  $\dim x = \dim y - 1$ .

Il est parfois utile de considérer une représentation graphique des complexes simpliciaux. Par exemple, le complexe simplicial de gauche de la figure 1 est formé des simplexes  $\{u, v\}$ ,  $\{u, w\}$ ,  $\{v, w\}$  (les trois segments, de dimension 1), et  $\{u\}$ ,  $\{v\}$ ,  $\{w\}$  (leurs faces) — les sommets sont représentés comme des points. Le diagramme de droite est la représentation du complexe simplicial  $(V, \leq, K)$  avec  $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ , et où les simplexes sont les faces triangulaires (les simplexes de dimension 2)  $\{b, c, d\}$  et  $\{d, e, f\}$ , les segments (dimension 1)  $\{a, b\}$ ,  $\{c, e\}$  et  $\{e, g\}$ , et tous leurs sous-ensembles non vides.

Pour tout simplexe  $\alpha = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$  de  $K$  de dimension  $p$ , avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ , pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq p$ , on pose

$$\partial_p^i \alpha = \alpha \setminus \{x_i\}$$

où  $\setminus$  désigne la différence ensembliste. On appelle  $\partial_p^i \alpha$  la *face numéro  $i$*  de  $\alpha$ .

**Question 2.1.** Montrer l'égalité

$$\partial_{p-1}^i \partial_p^j \alpha = \partial_{p-1}^{j-1} \partial_p^i \alpha \quad (1)$$

pour tout simplexe  $\alpha$  de  $K$  de dimension  $p \geq 1$ , et pour tous  $i, j$  tels que  $0 \leq i < j \leq p$ .

**Question 2.2.** Étant donné un complexe simplicial  $K$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $C_p$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{K_p}$ . (On rappelle que  $K_p$  est l'ensemble des simplexes de dimension  $p$  de  $K$ .) Par extension, on notera  $C_{-1}$  l'espace vectoriel 0 réduit à un seul élément noté aussi 0. On appelle tout vecteur de  $C_p$  une *chaîne* de dimension  $p$ .

On pose  $d_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ , pour tout  $p \geq 0$ , l'unique application linéaire telle que

$$d_p(\widehat{\alpha}) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \widehat{\partial_p^i \alpha}$$

si  $p \geq 1$ , et telle que  $d_p(\alpha) = 0$  si  $p = 0$ . Autrement dit,  $d_0$  est l'application nulle et pour tout  $p \geq 1$ , pour tout vecteur  $\sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\alpha}$  de  $C_p$ ,

$$d_p \left( \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\alpha} \right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{\alpha \in K_p} a_\alpha \widehat{\partial_p^i \alpha}$$

On appelle  $d_p$  l'opérateur *bord*. Montrer que  $d_{p-1} \circ d_p$  est l'application nulle pour tout  $p \geq 1$ . En déduire que  $\text{Im } d_p \subset \text{Ker } d_{p-1}$ .

**Question 2.3.** Le sous-espace vectoriel  $Z_p = \text{Ker } d_p$  de  $C_p$ ,  $p \geq 0$ , est l'ensemble des *cycles* de dimension  $p$ . Le sous-espace vectoriel  $B_p = \text{Im } d_{p+1}$  de  $C_p$ ,  $p \geq 0$ , est l'ensemble des *bords* de dimension  $p$ . Par la question 2.2,  $B_p$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $Z_p$ ; autrement dit, tout bord est un cycle. On note  $H_p$  l'orthogonal de  $B_p$  dans  $Z_p$ .  $H_p$  est le  $p$ -ième espace vectoriel d'homologie de  $K$ .

La dimension  $\beta_p$  de  $H_p$  est appelé le  $p$ -ième nombre de Betti de  $K$ . D'autre part, la caractéristique d'Euler de  $K$  est

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \text{card } K_p$$

Montrer le *théorème d'Euler-Poincaré* :

$$\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p \beta_p \tag{2}$$

**Question 2.4.** Calculer les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler du complexe simplicial de gauche de la figure 1, pour l'ordre  $u < v < w$ .

### 3 Calcul des nombres de Betti

Dans cette partie, on va concevoir des algorithmes pour calculer les nombres de Betti d'un complexe simplicial  $(V, \leq, K)$ . Pour ceci, on choisit une énumération des simplexes de dimension  $p$  de  $K$ , pour chaque  $p \in \mathbb{N}$ ; on notera  $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_{\text{card } K_p}^{(p)}$  les simplexes de dimension  $p$  de  $K$ . On dit que le *numéro* de  $\alpha_j^{(p)}$  est  $j$ .  $K$  est alors représenté à l'aide des données suivantes :

- un entier  $n$  supérieur ou égal à la dimension de tout simplexe de  $K$  ;
- un tableau  $c$ , tel que  $c[p]$  est le nombre de simplexes de  $K$  de dimension  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$  ;
- un tableau  $face$ , tel que  $face[p, j, i]$  est le numéro du simplexe  $\partial_p^i \alpha_j^{(p)}$ , pour tous  $1 \leq p \leq n$ ,  $1 \leq j \leq c[p]$ ,  $0 \leq i \leq p$ .

L'ordre  $\leq$  sur  $V$  est donné par  $\alpha_1^{(0)} < \alpha_2^{(0)} < \dots < \alpha_{c[0]}^{(0)}$ . On notera que, pour tous  $p$  et  $j$  fixés, tous les  $face[p, j, i]$ ,  $0 \leq i \leq p$ , sont des entiers distincts.

Par exemple, le complexe simplicial de droite de la figure 1 sera représenté par :

- $n = 2$  ;
- $c[0] = 7$ ,  $c[1] = 9$ ,  $c[2] = 2$  ;
- En numérotant les simplexes comme suit :

dimension 0 :	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>{a}</td><td>{b}</td><td>{c}</td><td>{d}</td><td>{e}</td><td>{f}</td><td>{g}</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	{a}	{b}	{c}	{d}	{e}	{f}	{g}				
1	2	3	4	5	6	7													
{a}	{b}	{c}	{d}	{e}	{f}	{g}													
dimension 1 :	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>{a, b}</td><td>{b, c}</td><td>{b, d}</td><td>{c, d}</td><td>{c, e}</td><td>{d, e}</td><td>{d, f}</td><td>{e, f}</td><td>{e, g}</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	{a, b}	{b, c}	{b, d}	{c, d}	{c, e}	{d, e}	{d, f}	{e, f}	{e, g}
1	2	3	4	5	6	7	8	9											
{a, b}	{b, c}	{b, d}	{c, d}	{c, e}	{d, e}	{d, f}	{e, f}	{e, g}											
dimension 2 :	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>{b, c, d}</td><td>{d, e, f}</td></tr> </table>	1	2	{b, c, d}	{d, e, f}														
1	2																		
{b, c, d}	{d, e, f}																		

le tableau  $face[p, j, i]$  est donné par :

$$face[1, j, i] = \begin{array}{c|cccccccc} i \setminus j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{array} \quad face[2, j, i] = \begin{array}{c|cc} i \setminus j & 1 & 2 \\ \hline 0 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}$$

**Question 3.1.** On identifie les opérateurs bord  $d_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  à leurs matrices, en choisissant pour tout  $C_q$  sa base standard  $\widehat{\alpha}_1^{(q)}, \dots, \widehat{\alpha}_{c[q]}^{(q)}$ . On note  $d_p^t$  la matrice transposée de  $d_p$ . Montrer que

$$H_p = \text{Ker} \begin{bmatrix} d_{p+1}^t \\ d_p \end{bmatrix}$$

**Question 3.2.** En déduire, ainsi que de la partie 1, un algorithme prenant en entrée une représentation  $(n, c, face)$  d'un complexe simplicial  $K$ , et un entier naturel  $p$ , et retournant le nombre de Betti  $\beta_p$  de  $K$ . En particulier, on demande d'écrire effectivement le programme construisant les matrices impliquées, dans le style des programmes donnés en question 1.2 et 1.3.

Combien d'opérations élémentaires nécessite cet algorithme ?

**Question 3.3.** Soit  $(V, \leq, K)$  un complexe simplicial, et soit  $\gamma$  un sous-ensemble non vide de  $V$  qui n'est pas dans  $K$ , mais dont tous les sous-ensembles stricts sont dans  $K$ . On note que  $K \cup \{\gamma\}$  est un complexe simplicial.

Posons  $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}}$  les nombres de Betti de  $K$ ,  $(\beta'_p)_{p \in \mathbb{N}}$  ceux de  $K' = K \cup \{\gamma\}$ . Soit  $d'_p$  l'opérateur bord de  $K'$ , et disons que  $\gamma$  crée un cycle dans  $K$  (de dimension  $p - 1$ ) si et seulement si  $d'_p(\widehat{\gamma}) \in \text{Im } d_p$ .

Montrer que, si  $\gamma$  crée un cycle dans  $K$ , alors  $\beta'_p = \beta_p + 1$  et  $\beta'_q = \beta_q$  pour tout  $q \neq p$ ; et si  $\gamma$  ne crée pas de cycle dans  $K$ , alors  $p \geq 1$ ,  $\beta'_{p-1} = \beta_{p-1} - 1$  et  $\beta'_q = \beta_q$  pour tout  $q \neq p - 1$ .

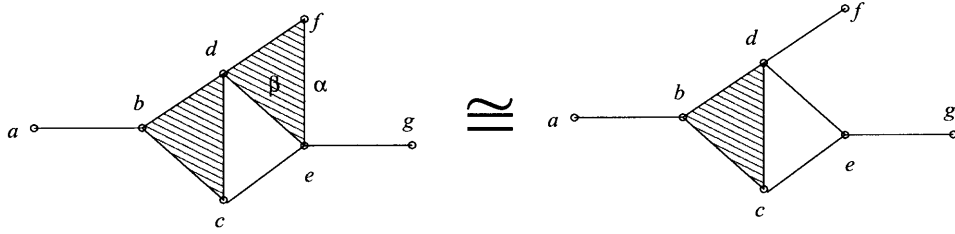


FIG. 2 – Homotopie simple

**Question 3.4.** Soient  $K$  et  $K'$  deux complexes simpliciaux. On dit que  $K$  est obtenu à partir de  $K'$  en *contractant* une face  $\beta$  de  $K'$  si et seulement s'il existe une face directe  $\alpha$  de  $\beta$  telle que  $K = K' \setminus \{\alpha, \beta\}$ . (Un exemple est donné en figure 2.) Montrer que  $K \cup \{\alpha\}$  est un complexe simplicial, mais pas  $K \cup \{\beta\}$ . Montrer que  $\alpha$  crée un cycle dans  $K$ , et que  $\beta$  ne crée pas de cycle dans  $K \cup \{\alpha\}$ . En déduire que  $K$  et  $K'$  ont les mêmes nombres de Betti.

**Question 3.5.** On note  $\cong$  la relation entre complexes simpliciaux définie par  $K \cong K'$  si et seulement s'il existe un nombre fini de complexes simpliciaux  $K_0 = K, K_1, \dots, K_{m-1}, K_m = K'$  tels que, pour tout  $i$  de 1 à  $m$ ,  $K_i$  est obtenu à partir de  $K_{i-1}$  en contractant une face, ou  $K_{i-1}$  est obtenu à partir de  $K_i$  en contractant une face. On dira alors que  $K$  et  $K'$  sont *simplement homotopes*.

Que peut-on dire des nombres de Betti de deux complexes simpliciaux simplement homotopes? Quels sont les nombres de Betti, et la caractéristique d'Euler, du complexe simplicial de droite de la figure 1?

## 4 Champs de vecteurs discrets

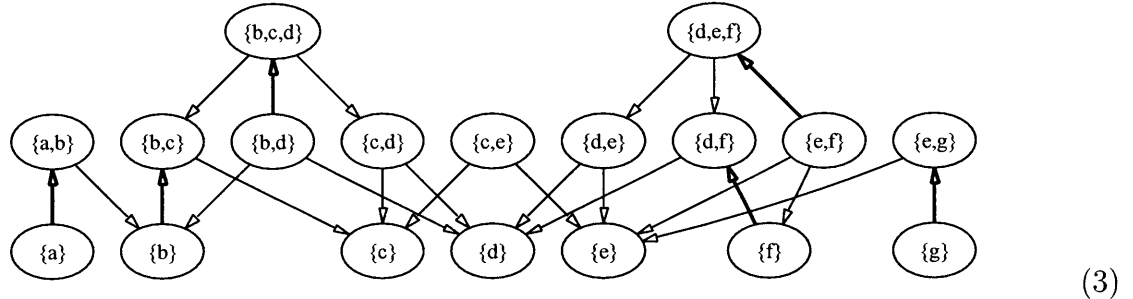
Pour tout complexe simplicial  $K$ , on appelle *champ de vecteurs discret* sur  $K$  toute relation binaire  $\triangleright$  sur  $K$  telle que :

- (i)  $\alpha \triangleright \beta$  implique que  $\alpha \sqsubset \beta$ ;
- (ii) pour tout simplexe  $\alpha$ , il existe au plus un simplexe  $\beta$  tel que  $\alpha \bowtie \beta$ , où  $\bowtie$  est la relation définie par  $\alpha \bowtie \beta$  si et seulement si  $\alpha \triangleright \beta$  ou  $\beta \triangleright \alpha$ .

On pourra vérifier que le complexe simplicial de la droite de la figure 1 a, par exemple, un champ de vecteurs discret défini par :

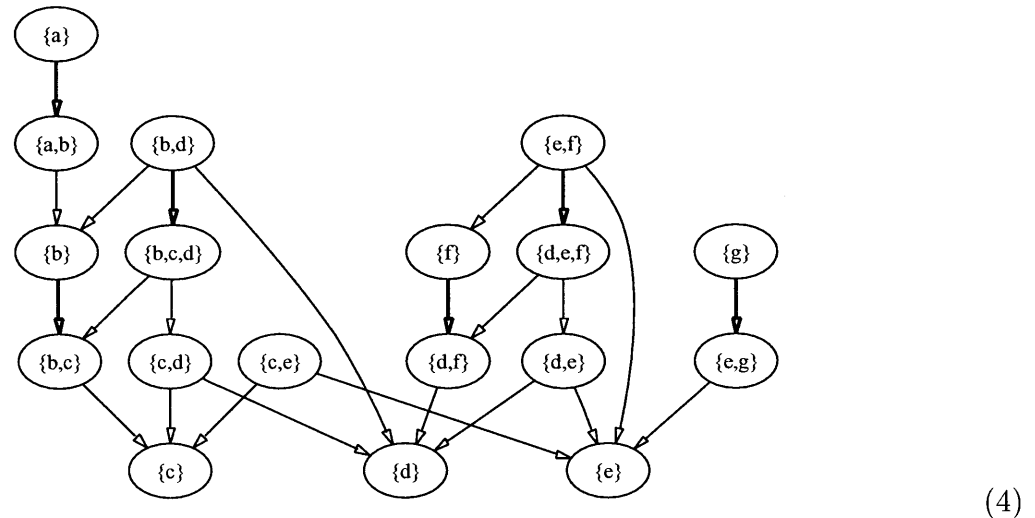
$$\begin{array}{lll} \{b\} \triangleright \{b, c\} & \{b, d\} \triangleright \{b, c, d\} & \{a\} \triangleright \{a, b\} \\ \{g\} \triangleright \{e, g\} & \{f\} \triangleright \{d, f\} & \{e, f\} \triangleright \{d, e, f\} \end{array}$$

Si  $\triangleright$  est un champ de vecteurs discret sur  $K$ , on définit la relation binaire  $\rightarrow$  par  $\alpha \rightarrow \beta$  si et seulement si  $\alpha \triangleright \beta$ , ou bien  $\alpha \sqsubset \beta$  et  $\beta \not\triangleright \alpha$ . Dans l'exemple, la relation  $\rightarrow$  est celle décrite dans le diagramme (3) ci-dessous, où l'on trouve une flèche de  $\alpha$  vers  $\beta$  si et seulement si  $\alpha \rightarrow \beta$ . On observera que la flèche  $\alpha \rightarrow \beta$  monte si et seulement si  $\alpha \triangleright \beta$ ; on a représenté ces flèches montantes en gras pour mieux les voir.



On dit que  $\triangleright$ , ou  $\rightarrow$ , est *acyclique* si et seulement s'il n'existe pas de simplexe  $\alpha_1$  tel que  $\alpha_1 \rightarrow^+ \alpha_1$ , autrement dit si et seulement s'il n'existe pas de simplexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  ( $k \geq 1$ ) tels que  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k \rightarrow \alpha_1$ .

On peut réarranger le diagramme (3) comme suit et ainsi constater de visu que le champ de vecteurs discret  $\triangleright$  de l'exemple est acyclique :



Dans le reste de cette partie, on supposera que  $K$  est un complexe simplicial fixé, et que  $\triangleright$  est un champ de vecteurs discret acyclique sur  $K$ .

**Question 4.1.** On appelle *sous-complexe*  $K'$  de  $K$  tout sous-ensemble de  $K$  qui est un complexe simplicial. Soit  $A'$  l'ensemble de tous les simplexes de dimension maximale de  $K'$ . On admettra que,  $\triangleright$  étant acyclique, pour tout sous-complexe  $K'$  non vide de  $K$ , il existe un simplexe  $\alpha$  dans  $A'$  tel qu'il n'y a pas de simplexe  $\gamma$  dans  $A'$  avec  $\gamma \rightarrow^+ \alpha$ . On fixera un tel simplexe pour chaque sous-complexe  $K'$  non vide, et on le notera  $\alpha_{\max}(K')$ .



Dans l'exemple ci-dessus, on vérifie que  $A'$  contient juste les deux simplexes  $\{b, c, d\}$  et  $\{d, e, f\}$ . On peut constater sur le diagramme (4) que l'on peut choisir indifféremment l'un ou l'autre pour  $\alpha_{\max}(K)$ .

Un sous-complexe  $K'$  sera dit *normal* si et seulement s'il n'existe pas de simplexes  $\alpha \in K', \beta \notin K'$  tels que  $\alpha \bowtie \beta$ .

Soit  $K'$  un sous-complexe normal non vide de  $K$ ,  $\alpha = \alpha_{\max}(K')$ , et  $\beta$  un simplexe tel que  $\alpha \bowtie \beta$ . Montrer que  $\beta$  est aussi dans  $K'$ , que  $\beta \triangleright \alpha$ , et que  $K' \setminus \{\alpha, \beta\}$  est un sous-complexe normal de  $K$ .

**Question 4.2.** Un simplexe  $\alpha$  de  $K$  est dit *critique* si et seulement s'il n'existe pas de simplexe  $\beta$  de  $K$  tel que  $\alpha \bowtie \beta$ .

Soit  $K'$  un sous-complexe normal non vide de  $K$ ,  $\alpha = \alpha_{\max}(K')$ . Montrer que, si  $\alpha$  est critique, alors  $K' \setminus \{\alpha\}$  est un sous-complexe normal de  $K$ .

**Question 4.3.** Pour tout sous-complexe normal  $K'$  de  $K$ , on note  $c_p(K')$  le nombre de simplexes critiques de  $K'$ , et  $\beta_p(K')$  le  $p$ -ième nombre de Betti de  $K'$ . Montrer que l'on a les *inégalités de Morse* :

$$\sum_{p=0}^m (-1)^{m-p} c_p(K') \geq \sum_{p=0}^m (-1)^{m-p} \beta_p(K')$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , ainsi que l'*égalité de Morse* :

$$\chi(K') = \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^p c_p(K')$$

(Indication : supprimer dans le bon ordre des simplexes de  $K'$ , en se fondant sur les questions précédentes. On pourra s'aider des résultats de la partie 3.)

**Question 4.4.** En appliquant le résultat précédent au cas  $K' = K$ , en déduire les *inégalités de Morse faibles* :

$$c_p(K) \geq \beta_p(K)$$

pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

## 5 Évasivité

Soit  $(V, \leq, K)$  un complexe simplicial fixé,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ ,  $n \geq 1$ .

Le but de cette partie est d'examiner la possibilité d'écrire un programme prenant en entrée un sous-ensemble  $\alpha$  de  $V$  et retournant VRAI si  $\alpha$  est un simplexe de  $K$ , FAUX sinon.

On se limite à des programmes qui procèdent uniquement en posant des *questions* de la forme "est-ce que  $v_i \in \alpha$ ?" ( $1 \leq i \leq n$ ), et selon la réponse, vrai ou faux, posera d'autre

questions, jusqu'à décider de retourner VRAI ou FAUX. Un tel programme sera appelé un *reconnaisseur*  $\text{REC}_K(\alpha)$  pour  $K$ .

Un reconnaisseur sera estimé efficace s'il peut décider si  $\alpha \in K$ , pour tout  $\alpha \subset V$ , en posant strictement moins de  $n$  questions. Pour chercher un reconnaisseur efficace pour  $K$ , on va jouer sur l'ordre dans lequel il pose les questions.

On associera à chaque reconnaisseur  $\text{REC}_K$  une application qui à tout sous-ensemble  $\alpha$  de  $V$  associe une permutation  $\sigma_\alpha$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , vérifiant la propriété :

( $\ddagger$ ) pour tout  $\alpha \subset V$ , si  $v_{\sigma_\alpha(k)} \in \alpha$  et  $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(k)}\}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) alors  $\sigma_\beta(j) = \sigma_\alpha(j)$  pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ .

La façon de construire l'application  $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$  à partir de  $\text{REC}_K$  est la suivante. Supposons que, pour décider si  $\alpha \in K$ ,  $\text{REC}_K$  pose comme première question "est-ce que  $v_{i_1} \in \alpha$ ?", alors on pose  $\sigma_\alpha(1) = i_1$ . Ensuite, si  $\text{REC}_K$  pose comme deuxième question "est-ce que  $v_{i_2} \in \alpha$ ?", alors on pose  $\sigma_\alpha(2) = i_2$ , et ainsi de suite. Intuitivement,  $\text{REC}_K$  ne va pas poser deux fois la même question, ce qui fait de  $\sigma_\alpha$  une permutation. La condition ( $\ddagger$ ) exprime que si l'on doit poser une série de questions pour reconnaître  $\alpha$ , et si  $\beta$  ne diffère de  $\alpha$  qu'à partir de la  $k$ ème question, alors on aurait posé les mêmes  $k$  premières questions pour reconnaître  $\beta$ .

Dans la suite, on fixera un reconnaisseur  $\text{REC}_K$ . On note  $\sigma_\alpha$  la famille de permutations vérifiant ( $\ddagger$ ) qui lui est associée.

On définit  $\triangleright$  par  $\beta \triangleright \alpha$  si et seulement si  $v_{\sigma_\alpha(n)} \in \alpha$  et  $\beta = \alpha \setminus \{v_{\sigma_\alpha(n)}\}$ . (On rappelle que  $n$  est le nombre de sommets de  $K$ .) Comme précédemment, on définit  $\bowtie$  par  $\alpha \bowtie \beta$  si et seulement si  $\alpha \triangleright \beta$  ou  $\beta \triangleright \alpha$ .

**Question 5.1.** Montrer que pour tout  $\alpha \subset V$ , il existe un unique  $\beta \subset V$  tel que  $\alpha \bowtie \beta$ .

**Question 5.2.** Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites finies  $[n_1, \dots, n_k]$  ( $k \geq 0$ ) d'entiers naturels. On appelle  $k$  la *longueur* de la suite  $[n_1, \dots, n_k]$ . La suite  $[]$  de longueur nulle est la *suite vide*. On définit la relation binaire  $\prec$  sur  $\mathcal{S}$  par  $[n_1, \dots, n_k] \prec [n'_1, \dots, n'_\ell]$  si et seulement s'il existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$  satisfaisant les conditions (a) et (b) :

- (a) pour tout  $i$ ,  $1 \leq i < j$ ,  $n_i = n'_i$ ;
- (b)  $\ell = j - 1$ , ou bien  $\ell \geq j$  et  $n_j < n'_j$ ;

Montrer que  $\prec$  est un ordre strict, c'est-à-dire une relation irreflexive et transitive.

**Question 5.3.** Pour tout  $\alpha \subset V$ , on pose  $\check{\alpha} = \alpha \Delta \{v_{\sigma_\alpha(n)}\}$ , où  $\Delta$  dénote la différence symétrique. On pose d'autre part  $[[\alpha]]$  la suite croissante des indices  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tels que  $v_{\sigma_\alpha(i)} \in \alpha$ . (Par exemple, si  $n = 3$ ,  $\alpha = \{v_1, v_2\}$ ,  $\sigma_\alpha = \{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1\}$ , alors  $[[\alpha]]$  est  $[2, 3]$ .)

Montrer que  $\beta \rightarrow \alpha$  implique  $[[\check{\beta}]] \prec [[\check{\alpha}]]$ . En déduire que  $\triangleright$  est un champ de vecteur discret acyclique sur  $K$ .

**Question 5.4.** Un sous-ensemble  $\alpha$  non vide de  $V$  est *évasif* si et seulement si  $\alpha \in K$  et  $\check{\alpha} \notin K \cup \{\emptyset\}$ , ou bien  $\alpha \notin K \cup \{\emptyset\}$  et  $\check{\alpha} \in K$ .

Le reconnaisseur  $\text{REC}_K$  est *inefficace* si et seulement s'il existe un sous-ensemble  $\alpha$  évasif. Il est *efficace* sinon. L'idée est que  $\text{REC}_K$  est inefficace si et seulement s'il y a un simplexe  $\alpha$  non vide tel que, pour décider si  $\alpha$  est dans  $K$ , on est obligé de poser toutes

les questions jusqu'à la dernière. Aucun reconnaisseur ne teste jamais l'appartenance de l'ensemble vide à  $K$ ; ceci est dû au fait que l'ensemble vide n'est jamais dans  $K$ , et justifie la définition.

Soient  $\beta_p$  les nombres de Betti de  $K$ .

Montrer le *théorème de Kahn-Saks-Sturtevant* : quel que soit le reconnaisseur  $\text{REC}_K$  pour  $K$ , il y a au moins  $2 \left( \sum_{p \in \mathbb{N}} \beta_p - 1 \right)$  sous-ensembles évasifs pour  $\text{REC}_K$ . En déduire que ceci implique qu'il n'existe aucun reconnaisseur efficace pour  $K$  dès que  $\sum_{p \in \mathbb{N}} \beta_p \geq 2$ . On pourra utiliser la question 4.4.

Les complexes simpliciaux de la figure 1 ont-ils des reconnaisseurs efficaces ?