Capes analyse : corrigé

Partie A : Quelques résultats fondamentaux

A. I. L'inégalité de Bernoulli

On peut proposer pour gérer le cas d'égalité, de démontrer que, si $a = 0$ il y a égalité et sinon, il y a inégalité stricte. Il est aussi possible de gérer le cas d'égalité selon la démonstration utilisée.
Comme idées de démonstrations élémentaires, on peut proposer :

1. Soient $a > -1$ et $n \in \widehat{\mathbb{N}}$. Si $a = 0$, on a bien égalité. Supposons donc $a \neq 0$. En posant $x = 1 + a$, on a $x > 0$ et :

$$(1+a)^n - 1 - n\,a = x^n - 1 - n\,(x-1) = (x-1)\left[\sum_{k=0}^{n-1} x^k - n\right] = (x-1)\left[\sum_{k=1}^{n-1}(x^k - 1)\right].$$

Dès lors, si $x \leqslant 1$ alors, pour tout $k \geqslant 1$, $x^k - 1 \leqslant 0$ et donc $x^n - 1 - n(x-1) > 0$.

2. si $n \in \widehat{\mathbb{N}}$, alors $(1+a)^n - 1 - n\,a = a^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{k-1}(1+a)^h$, (ce qui n'est pas fondamentalement différent de la solution proposée par l'énoncé).

3. une récurrence simple sur $n \in \widehat{\mathbb{N}}$ sur l'assertion " pour tout $a \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $(1+a)^n > 1 + n\,a$ ".

4. une étude des variations de l'application $a \mapsto (1+a)^n - 1 - n\,a$ sur $]-1, +\infty[$ via le signe de la dérivée.

5. l'inégalité des accroissements finis appliquée à $t \mapsto t^n$ entre 1 et x ($x > 0$).

6. la stricte convexité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^*$ qui permet de situer le graphe par rapport à la tangente en 1.

7. la formule du binôme de Newton fournit une solution partielle pour le cas $a > 0$.
Et certainement bien d'autres, dont une via l'inégalité de Cauchy...

A. II. L'inégalité de Cauchy

1. Soit donc $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$; on a $0 \leqslant (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a\,b}$ donc $\sqrt{a\,b} \leqslant \frac{a+b}{2}$ avec égalité si et seulement $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, c-à-d $a = b$.

On peut aussi observer que dans un triangle rectangle ABC, si H est le pied de la hauteur issue de A et si $BH = a$, $CH = b$ (et il est toujours possible de construire un tel triangle) alors, la médiane issue du sommet est un rayon du cercle circonscript donc vaut $\frac{a+b}{2}$ et est plus grande que la hauteur $AH = \sqrt{ab}$ (d'après les relations métriques dans le triangle rectangle), avec égalité si et seulement si H est le milieu de l'hypothénuse, c-à-d $a = b$.

2. 2.1. Une récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ et la propriété ii) fournit : pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n \in \mathbb{A}$. Comme la suite $(2^n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante, $\mathbb{A}$ n'est pas fini.

Supposons ensuite, par l'absurde, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \notin \mathbb{A}$; en réécrivant la propriété iii) sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \notin \mathbb{A} \Rightarrow n+1 \notin \mathbb{A}$, une autre récurrence simple montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant n_0$, alors $n \notin \mathbb{A}$, autrement dit $\mathbb{A} \subset \{1, \cdots, n_0 - 1\}$ est fini. D'où la contradiction.

Par contraposition, on en déduit que $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{A}$, d'où l'égalité.

Une variante par l'absurde basée sur l'existence de n tel que $2^n > n_0$ est possible.

On peut aussi accepter le raisonnement suivant : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$; il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p \geqslant n$ (par exemple, $p = n$ ce qui peut être prouvé par récurrence ! ou à l'aide de Bernoulli) ; comme, $2^p \in \mathbb{A}$, en utilisant ii) un nombre fini de fois, on en déduit que $2^p - (2^p - n) = n \in \mathbb{A}$ et donc $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{A}$.

2.2. Soit donc $\mathbb{A} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^n, \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left[\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right]^{\frac{1}{n}} \text{ avec égalité ssi } x_1 = \cdots = x_n \right\}$.

i) $1 \in \mathbb{A}$ en évidence.

ii) Soit $n \geqslant 1$; supposons que $n \in \mathbb{A}$; soient $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ $2n$ réels strictement positifs. En posant $SX_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, $SY_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$, $PX_n = \prod_{k=1}^{n} x_k$ et $PY_n = \prod_{k=1}^{n} y_k$, et en utilisant le cas $n = 2$ on a :

$$G_{2n} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \frac{1}{2}(SX_n + SY_n) \geqslant \sqrt{SX_n\,SY_n}$$

Or, par hypothèse, $n \in \mathbb{A}$, donc $SX_n \geqslant (PX_n)^{\frac{1}{n}}$ et $SY_n \geqslant (PY_n)^{\frac{1}{n}}$: et donc

$$G_{2n} \geqslant \sqrt{(PX_n)^{\frac{1}{n}}(PY_n)^{\frac{1}{n}}} = (PX_nPY_n)^{\frac{1}{2n}}$$

De plus, dans la chaîne des inégalités précédentes, il y a inégalité stricte au moins une fois dès que les $2n$ nombres $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ ne sont pas tous égaux. Donc $2n \in \mathbb{A}$.

Ensuite, soit $n \geqslant 1$; supposons que $n+1 \in \mathbb{A}$; et soient $x_1, \cdots, x_n$ n réels strictement positifs.

Posons alors $x_{n+1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k > 0$; on a donc : $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k \geqslant \left[\prod_{k=1}^{n+1} x_k\right]^{\frac{1}{n+1}}$.

Or, $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+1}$ et $\left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} x_k\right]^{\frac{1}{n+1}} = (x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}\left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right]^{\frac{1}{n+1}}$;

on en déduit que $x_{n+1}^{1-\frac{1}{n+1}} \geqslant \left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right]^{\frac{1}{n+1}}$, puis après élévation à la puissance $\frac{n+1}{n}$ (l'application $x \mapsto x^{\frac{n+1}{n}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$) $x_{n+1} \geqslant \left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right]^{\frac{1}{n}}$ qui est l'inégalité voulue.

De plus, si les x_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$ ne sont pas tous égaux, il en est a fortiori de même des x_k pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$ et donc il y a inégalité stricte. Donc $n \in \mathbb{A}$. La question précédente permet d'en déduire que $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$ ce qui équivaut à l'inégalité de Cauchy.

3. Si les x_k sont tous égaux, on a égalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique. Supposons donc les x_k non tous égaux (ce qui implique que $n \geq 2$).

3.1. On a alors, pour $t \in [0,1]$, $\phi(t) > 0$; en effet $x_k + \dfrac{t}{n}\displaystyle\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k) = (1-t)x_k + t\,A_n$ où A_n est la moyenne arithmétique des x_h ; et $(1-t)x_k + t\,A_n > 0$ comme barycentre convexe de deux nombres > 0.

On a $\phi(0) = \left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right]$, et $\phi(1) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n$ banalement. Ensuite, montrons que ϕ strictement croissante sur $[0,1]$.

3.2. En effet, ϕ est dérivable sur $[0,1]$ par les théorèmes d'opérations sur le caractère dérivable, et on peut utiliser la relation fonctionnelle suivante (dérivée logarithmique sans le dire) :

$$\text{si } w = \prod_{k=1}^{n} u_k \text{ alors } w' = \sum_{h=1}^{n} u'_h \prod_{\substack{k=1\\k\neq h}}^{n} u_k \text{ donc } \frac{w'}{w} = \sum_{h=1}^{n} \frac{u'_h}{u_h}$$

d'où : $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k)}{x_k + \frac{t}{n}\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k)}$, puis, $\left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)'(t) = -\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\left(\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k)\right)^2}{\left(x_k + \frac{t}{n}\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k)\right)^2} \leqslant 0$ comme opposé d'une somme de carrés. Comme de plus, les x_k ne sont pas tous égaux, il existe k_0 tel que

$\displaystyle\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_{k_0}) = \left\{\sum_{h=1}^{n} x_h\right\} - n\,x_{k_0} \neq 0$, donc $\left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)'(t) < 0$, et donc $\dfrac{\phi'}{\phi}$ est strictement décroissante sur *l'intervalle* $[0,1]$.

On en déduit que $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)} \geqslant \dfrac{\phi'(1)}{\phi(1)} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k)}{\sum_{h=1}^{n} x_h} = 0$ avec égalité seulement si $t = 1$ donc $\phi'(t) \geqslant 0$ avec égalité seulement si $t = 1$ d'où la stricte croissance de ϕ sur l'intervalle $[0,1]$

3.3. et donc l'inégalité stricte $\phi(0) < \phi(1)$, puis l'inégalité de Cauchy via la stricte croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ sur $]0, +\infty[$.

4. 4.1. Ceci résulte de l'inégalité stricte dans l'inégalité de Cauchy pour $n = 2$: si $M > m$ alors $\left(\frac{M+m}{2}\right)^2 > M\,m$. Somme et produit étant commutatifs, on ne restreint pas la généralité du raisonnement en supposant que $m = x_1$ et $M = x_2$; alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1x_2 \prod_{2<k\leqslant n} x_k < \left(\frac{x_1+x_2}{2}\frac{x_1+x_2}{2}\right) \prod_{2<k\leqslant n} x_k$ (avec la convention habituelle sur les produits vides).

L'invariance de la moyenne arithmétique résulte de l'associativité de la barycentration ; c'est aussi tout simplement une conséquence de l'égalité $x_1 + x_2 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2}$.

4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n$ n réels strictement positifs ; posons $y_k = \dfrac{x_k}{\sum\limits_{h=1}^{n} x_h} > 0$ alors $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k = 1$ et

donc $\left[\prod\limits_{k=1}^{n} y_k\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}$ d'où $\left\{\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}{\left[\sum\limits_{h=1}^{n} x_h\right]^n}\right\}^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}$; l'inégalité voulue en découle immédiatement.

Il y a égalité dans l'inégalité avec les x_k si et seulement si il y égalité dans l'inégalité avec les y_k ; or l'égalité des y_k équivaut à celle des x_k. Le cas d'égalité est donc démontré.

4.3. Soit $n \geqslant 2$; introduisons $K = \left\{(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 \geqslant 0, \cdots, x_{n-1} \geqslant 0, \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k \leqslant 1\right\}$. (Il n'est pas utile de démontrer que K est l'adhérence de Ω).

K est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n-1}$.

En effet, elle est fermée comme intersection de fermés : les projections $p_k \ : \ \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ $(x_1, \cdots, x_{n-1}) \to x_k$ étant continues, les $F_k = \overset{-1}{p}_k([0, +\infty[)$ sont des fermés de $\mathbb{R}^{n-1}$ comme images réciproques de fermés de $\mathbb{R}$; il en est de même de l'application $s = \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k$ et donc $G = \overset{-1}{s}(]-\infty, 1])$ est aussi fermé. Or $K = G \cap \bigcap\limits_{k=1}^{n-1} F_k$.

Ensuite, il est clair que K est inclus dans la boule unité de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} |x_k|$; donc c'est une partie bornée de $\mathbb{R}^{n-1}$. En dimension finie, les parties fermées bornées sont compactes. Donc K est compacte.

L'application $\psi \ : \ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k\right) \prod\limits_{k=1}^{n-1} x_k$ est continue sur K d'après les théorèmes de permanence du caractère continu ; donc elle admet un maximum sur le compact K. Si un des x_k est nul, ou si la somme $\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k$ vaut 1 alors $\psi(x_1, \cdots, x_{n-1}) = 0$; comme $\psi(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}) > 0$, ce maximum est atteint dans Ω. Soit $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ un élément de Ω en lequel le maximum est atteint ; alors les a_k sont tous égaux, sinon d'après le 1), on pourrait trouver dans Ω un $(n-1)$-uplet distinct en lequel ψ prendrait une valeur strictement plus grande. Notons a la valeur commune des a_k. Le maximum est donc atteint en $(a, a, \cdots, a)$ avec $a \in]0, 1[$. Comme $\psi(a, \cdots, a) = \big((1-(n-1)\,a\big)\,a^{n-1}$, la dérivée de $x \mapsto \big((1-(n-1)\,x\big)x^{n-1}$ s'annule nécessairement pour $x = a$ (CN d'extremum du premier ordre sur un intervalle ouvert). On en déduit que $a = \frac{1}{n}$. Et donc ψ atteint son maximum en $(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$ et seulement en ce point.

5. On a donc $\psi(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leqslant \frac{1}{n^n}$ pour tout $(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \Omega$ avec égalité si et seulement si tous les x_k $1 \leqslant k \leqslant n-1$ sont égaux à $\frac{1}{n}$ donc aussi x_n, ce qui constitue l'inégalité de Cauchy dans le cas particulier voulu L'inégalité de Cauchy est donc démontrée.

Il est possible de démontrer que sur $]0, 1[$ $\phi(x) = \big(1 - (n-1)x\big)x^{n-1} \leqslant \frac{1}{n^n}$ avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{n}$ par voie purement algébrique, par exemple en utilisant l'inégalité de Bernoulli. On observe d'abord que $\phi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^n} > 0$; on peut donc se restreindre à $]0, \frac{1}{n-1}[$ et en posant $y = x - \frac{1}{n}$, on a $y < \frac{1}{n(n-1)}$ et $\phi(x) = \frac{1}{n^n}(1 + n\,y)^{n-1}\big(1 - (n-1)\,n\,y\big) \geqslant \frac{1}{n^n}(1 + n\,y)^{n-1}(1 - n\,y)^{n-1}$ via Bernoulli à l'envers. Donc $\psi(x) \leqslant \frac{1}{n^n}$ avec égalité si et seulement si $y = 0$ soit $x = \frac{1}{n}$.

N.B. En réalité, on peut déduire Cauchy directement de Bernoulli.

A. III. Un calcul d'intégrale

1. Soient $x, y \in [a, b]$, avec $x < y$; alors $F(y) - F(x) \geqslant (y - x)f(x)$ et $F(x) - F(y) \geqslant (x - y)f(y)$; donc par addition, $(y - x)(f(y) - f(x)) \geqslant 0$ et donc $f(y) - f(x) \geqslant 0$; f est croissante.

2. Soient $x, y \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ et $z = (1 - \lambda)\,x + \lambda\,y$. On a :

$F(x) - F(z) \geqslant (x - z)f(z)$ et $F(y) - F(z) \geqslant (y - z)f(z)$; donc, en multipliant la première inégalité par $(1 - \lambda)$ et la seconde par λ et en ajoutant, il vient : $(1 - \lambda)\,F(x) + \lambda\,F(y) - F(z) \geqslant 0$. Donc F est convexe sur $[a, b]$.

3. Soit $a_0 = a < a_1 \cdots < a_n = b$ une subdivision σ de $[a,b]$; on a :

$F(a_{k+1}) - F(a_k) \geqslant (a_{k+1} - a_k)\, f(a_k)$ et donc, par sommation et télescopage : $F(b) - F(a) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_k)$.

De même $F(a_k) - F(a_{k+1}) \geqslant (a_k - a_{k+1})\, f(a_{k+1})$, donc, après passage aux opposés :

$$F(b) - F(a) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_{k+1})$$

4. Puisque f est continue par morceaux donc intégrable $(a,b]$, $\int_a^b f$ existe et comme f est croissante sur $[a,b]$, par définition de l'intégrale d'une part :

$$\int_a^b f = \sup_\sigma \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_k) \right\} \leqslant F(b) - F(a)$$

et d'autre part :

$$\int_a^b f = \inf_\sigma \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_{k+1}) \right\} \geqslant F(b) - F(a)$$

d'où l'égalité $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

On pouvait aussi choisir une subdivision régulière de $[a,b]$; f étant continue par morceaux sur $[a,b]$, on sait que les sommes de Riemann convergent vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, autrement dit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ainsi que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) f(a_{k+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Le théorème de passage à la limite dans les inégalités fournit alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où l'égalité.

Remarque : l'hypothèse f continue par morceaux n'a été ajoutée dans l'énoncé que pour rester dans le cadre du programme du capes.

A. IV. Continuité des applications convexes

1. Soient $a < b < c$ réels ; posons $b = (1-\lambda)a + \lambda c$ avec $\lambda \in]0,1[$; on a : $f(b) \leqslant (1-\lambda) f(a) + \lambda f(c)$ et donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{\lambda}{b - a}\,[f(c) - f(a)] = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

De même : $\displaystyle\frac{f(c) - f(b)}{c - b} \geqslant \frac{1 - \lambda}{c - b}\,[f(c) - f(a)] = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soient $b < x_0$ et $c > x_0$ quelconques ; soit enfin $h > 0$ tel que $x_0 \pm h \in [b,c]$; d'après l'inégalité des pentes, on a : $\displaystyle h\frac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} \leqslant f(x_0) - f(x_0 - h) \leqslant h\frac{f(c) - f(x_0)}{c - x_0}$ et donc $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0 - h) = f(x_0)$.

De la même façon : $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

f possède en x_0 une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(x_0)$. Donc f est continue en x_0, et finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction exponentielle

1. 1.1. On démontre qu'à x fixé, les deux suites $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n>|x|}$ et $\left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}\right)_{n>|x|}$ sont adjacentes.

Notons une fois pour toutes, que si $n > |x|$, alors $1 \pm \frac{x}{n} > 0$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ fixé et $n > |x|$; on a $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \times 1 \leqslant \left\{\dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)+1\right]\right\}^{n+1}$

d'après l'inégalité de Cauchy appliquée au $(n+1)$-uplet $\left((1+\frac{x}{n}), \cdots, (1+\frac{x}{n}), 1\right)$.

Or $\left\{\dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)+1\right]\right\}^{n+1} = \left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ d'où la croissance de la suite $\left(u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n>|x|}$.

(La croissance est stricte si $x \neq 0$.)

On peut aussi appliquer l'inégalité de Bernoulli (en remarquant que la suite est à termes strictement positifs) :

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right]^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1+(n+1)\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right] = 1$$

Il est utile d'observer pour la suite, que si $x > 0$ alors ce qui précède vaut pour tout $n \geqslant 1$, autrement dit la suite $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ est (strictement) croissante.

1.2. En observant que, pour $n > |x|$, $v_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{u_n(-x)}$, on en déduit la décroissance de la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$.

1.3. Enfin, $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left\{1-\left[1-\dfrac{x^2}{n^2}\right]^n\right\}$ ce qui montre que, d'une part $v_n(x) - u_n(x) > 0$ et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Bernoulli, que $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x)\dfrac{x^2}{n} \leqslant x^2 v_{n_0}(x)\dfrac{1}{n}$ où $n_0 = \mathsf{E}(|x|)+1$.

Donc $v_n(x) - u_n(x) = O(\frac{1}{n})$, qui converge vers 0. Donc les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, ces suites sont convergentes et ont la même limite. De plus, pour tout $n > |x|$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant \boldsymbol{e}(x) \leqslant \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, l'inégalité de gauche étant valide pour tout $n \geqslant 1$ si $x \geqslant 0$.

2. 2.1. Soit $x \in [a,b]$; posons $c = \max\{|a|,|b|\}$, $d = \min\{|a|,|b|\}$ et $n_0 = \mathsf{E}(c)+1$; d'après le théorème des suites adjacentes et la majoration précédente, on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$0 \leqslant \boldsymbol{e}(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n} \leqslant v_{n_0}(x)x^2\frac{1}{n} \leqslant c^2 v_{n_0}(d)\frac{1}{n}$$

C'est une majoration uniforme (en x). Donc $\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |\boldsymbol{e}(x) - u_n(x)| \leqslant \dfrac{K}{n}$ converge vers 0, ce qui prouve la convergence uniforme de $(u_n)_{n>c}$ vers $\boldsymbol{e}$ sur $[a,b]$, et donc aussi celle de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Comme les u_n sont des (restrictions de) fonctions polynômes, donc continues sur $[a,b]$, on en déduit que $\boldsymbol{e}$ est continue sur $[a,b]$, lui-même arbitraire, donc sur $\mathbb{R}$ (convergence uniforme locale).

Remarque : la continuité de $\boldsymbol{e}$ peut se démontrer de façon élémentaire sans référence à la convergence uniforme (confère question 2.4.).

2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et $n_0 = \mathsf{E}(|x|)+1$. Comme les suites sont adjacentes, on a $u_{n_0}(x) \leqslant \boldsymbol{e}(x) \leqslant v_{n_0}(x)$.

L'inégalité de Bernoulli fournit à gauche la minoration $u_{n_0}(x) \geqslant 1 + n_0\frac{x}{n_0} = 1+x$.

Supposons que $x < 1$; l'inégalité de Bernoulli fournit la minoration $(1-\frac{x}{n_0})^{n_0} \geqslant 1 - n_0\frac{x}{n_0} = 1-x$ et comme $1-x > 0$, en passant aux inverses, on a la majoration : $v_{n_0}(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$.

2.3.

2.3.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n > |x|$; on a $u_n(x)v_n(-x) = 1$; donc par passage à la limite dans l'égalité précédente, il vient $\boldsymbol{e}(x)\boldsymbol{e}(-x) = 1$ et donc, par définition de l'inverse d'un nombre, $\boldsymbol{e}(x)$ est inversible (donc non nul), d'inverse $\boldsymbol{e}(-x)$.

2.3.2. $\left(\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)$ converge vers 0, donc $\left|\frac{\varepsilon_n}{n}\right| < 1$ à partir d'un certain rang ; donc l'inégalité de Bernoulli fournit la minoration, à partir de ce rang : $\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \geqslant 1+\varepsilon_n$.

On a aussi la majoration, à partir du même rang : $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \leqslant \boldsymbol{e}(\varepsilon_n) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon_n}$

Chacune des suites $(1+\varepsilon_n)$ et $\left(\frac{1}{1-\varepsilon_n}\right)$ converge vers 1, donc le théorème des trois suites prouve la convergence de la suite $\left(\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\right)$ vers 1.

2.3.3. Soient x, y réels, et $n > \max\{|x|, |y|, |x+y|\}$.
On a : $u_n(x+y)u_n(-x)u_n(-y) = \left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n$ avec $\varepsilon_n = -\dfrac{x^2 + x\,y + y^2}{n} + \dfrac{xy(x+y)}{n^2} = o(1)$.
Donc, d'après ce qui précéde, la suite $(u_n(x+y)u_n(-x)u_n(-y))$ converge vers 1 ; par ailleurs cette suite converge aussi, via les théorèmes d'opérations sur les suites convergentes, vers $\boldsymbol{e}(x+y)\boldsymbol{e}(-x)\boldsymbol{e}(-y)$; l'unicité de la limite fournit l'égalité demandée.

2.4. Il y a de nombreuses façons de procéder –selon l'ordre d'énonciation des propriétés–, en particulier on peut très classiquement s'appuyer sur la relation fonctionnelle de l'exponentielle.

i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$;
ii) pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$,
$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;
iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$;
iv) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^p} = +\infty$;
v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$;
vi) exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
vii) exp est continue sur $\mathbb{R}$;
viii) exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

On pourrait citer aussi exp bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, mais c'est une conséquence des précédentes. (vi), iii) et v)).

i) on sait que $\boldsymbol{e}(x) \geqslant \left(1 + \frac{x}{n_0}\right)^{n_0}$ (avec $n_0 = \mathsf{E}(|x|)+1$), donc $\boldsymbol{e}(x) > 0$.
ii) l'égalité du 2.3.3. se réécrit $\boldsymbol{e}(x+y) = \boldsymbol{e}(x)\boldsymbol{e}(y)$.
iii) résulte de l'inégalité valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{e}(x) \geqslant 1 + x$;
iv) résulte de la minoration $\boldsymbol{e}(x) \geqslant \left(1 + \frac{x}{p+1}\right)^{p+1} \geqslant \frac{x^{p+1}}{(p+1)^{(p+1)}}$, valable pour tout $x \geqslant 0$;
v) résulte de l'encadrement, valable pour tout $x < 1$, $0 < \boldsymbol{e}(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$;
vi) soient $x < y$ et $n > \max\{|x|, |y|\}$;
alors $\left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) = 1 + \frac{y-x}{n} - \frac{xy}{n^2} > 1$ dès que $n > \frac{xy}{y-x}$.
donc il existe n tel que $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} < \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$; or $\boldsymbol{e}(x) < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$ et $\boldsymbol{e}(y) > \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$; donc $\boldsymbol{e}(x) < \boldsymbol{e}(y)$. Bien sûr, peut s'obtenir comme sous-produit du viii).
vii) déjà prouvée à la question 2.1. ; résulte aussi de la dérivabilité qui suit. Peut se démontrer directement.
viii) l'encadrement $1 + x \leqslant \boldsymbol{e}(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$, valable par exemple sur $]-1, +1[$, fournit $x \leqslant \boldsymbol{e}(x) - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$ donc $\boldsymbol{e}(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$ et donc $\boldsymbol{e}$ est dérivable en 0 avec $\boldsymbol{e}'(0) = 1$.
Soit alors $x \in \mathbb{R}$ quelconque ; comme $\boldsymbol{e}(x) \neq 0$, on a alors :
$$\boldsymbol{e}(x+h) - \boldsymbol{e}(x) = \boldsymbol{e}(x)\left(\boldsymbol{e}(h) - 1\right) \underset{0}{\sim} h\boldsymbol{e}(x)$$
donc $\boldsymbol{e}$ est dérivable en x et $\boldsymbol{e}'(x) = \boldsymbol{e}(x)$.

2.5. Les inégalités obtenues à la question 2.1 donnent avec $x = 1$: $0 \leqslant \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n} < \frac{3}{n}$ si $n \geqslant 10$ puisque $(1 - 1/10)^{-10} = \frac{10000000000}{3486784401} < 3$;
donc, pour que $\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}10^{-1}$, il suffit que $\frac{3}{n} \leqslant \frac{1}{2}10^{-1}$; $n = 60$ convient. $\left(1 + \frac{1}{60}\right)^{60}$ est donc une valeur approchée (rationnelle) par défaut de e à $\frac{1}{2}10^{-1}$ près.

Faisons l'hypothèse que la précision de calcul des calculatrices est suffisamment grande pour faire confiance au moins aux deux premières décimales des flottants affichés.

Cette hypothèse est raisonnable, car l'erreur relative sur un calcul de puissance entière x^n peut être estimée par : $\delta(x^n) \approx n\delta(x)$; avec $n = 60$, $x = \frac{61}{60} \approx 1$ et comme $\delta(x) < \epsilon$ (*epsilon machine*, au moins 10^{-10} sur les matériels courants), on a $\delta(x^n) < 10^{-8}$ et donc certainement $\Delta(x^n) < 10^{-7}$.

Pour calculer $\left(\frac{61}{60}\right)^{60}$ sans exponentiation machine, on peut utiliser un algorithme itératif :

```
a ← 61/60
p ← 1
pour k de 1 à 60
faire
        p ← p × a
finfaire
```

On obtient alors $\left(1 + \frac{1}{60}\right)^{60} = 2,69...$
On en déduit que $2,69... < \mathrm{e} < 2,74...$ ce qui ne permet pas de trancher entre $2,6$ et $2,7$ pour la valeur décimale approchée par défaut à 10^{-1} près. Il faut donc aller plus loin dans la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour conclure.
La minoration $\left(1 + \frac{1}{74}\right)^{74} < \mathrm{e}$ donne : $2,7001... < \mathrm{e}$ qui permet d'en déduire que la valeur décimale approchée par défaut à 10^{-1} près de e est $2,7$.

2.6. L'encadrement $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ est mal adapté au calcul numérique car, d'une part sa vitesse de convergence vers 0 est trop faible. De façon précise, elle est en $\frac{1}{n}$; en effet, Bernoulli fournit la majoration :
$$\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right] \leqslant 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$
et la question 2 de cette partie : $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \leqslant \boldsymbol{e}(-\dfrac{1}{n}) \leqslant \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ d'où la minoration :
$$\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right] \geqslant \frac{1}{n+1} \text{ et donc } \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right] \sim \frac{1}{n} \text{ et finalement } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim$$

$\dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

D'autre part, le calcul de x^n avec n grand et x proche de 1 est numériquement très instable ; si x est trop proche de 1, il sera arrondi à 1,0 (phénomène d'absorption) et le résultat du calcul sera 1,0.

3. 3.1. Il importe de noter que la somme est une somme finie. Il n'y a donc pas de problème de convergence.

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$; on a : $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{n^k(n-k)!}\frac{z^k}{k!}$.

On vérifie que, pour $k=0$ ou 1, $\dfrac{n!}{n^k(n-k)!} = 1$ et, pour $1 < k \leqslant n$, $\displaystyle\prod_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{n}\right) = \frac{\prod_{h=1}^{k-1}(n-h)}{n^{k-1}} = \frac{n!}{n^k(n-k)!}$

3.2. Soient $z \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$; on a : $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{z}{m}\right)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}[a_k(n)-a_k(m)]\frac{z^k}{k!}$.

Or $a_k(m) = a_k(n)$ si $k = 0, 1$, $a_k(m) = 0 \leqslant a_k(n)$ si $m < k \leqslant n$, $a_k(m) = a_k(n) = 0$ si $k > n$ et enfin, si $1 < k \leqslant m$ alors $\prod_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{m}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)$; donc, pour tout k, $a_k(m) \leqslant a_k(n)$.

Dès lors, on a $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{z}{m}\right)^m\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k(n)-a_k(m)|\frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}[a_k(n)-a_k(m)]\frac{|z|^k}{k!}$
$= \left(1+\dfrac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{|z|}{m}\right)^m = \left|\left(1+\dfrac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{|z|}{m}\right)^m\right|$.

La symétrie de l'inégalité par rapport au couple (m,n) montre que l'inégalité est vraie dans le cas $n \leqslant m$.

3.3. La suite $\left(\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n\right)_{n\neq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ d'après la question 1. C'est donc une suite de Cauchy. Soit donc $\varepsilon > 0$; il existe $n_0 \geq 1$ tel que $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$ impliquent $\left|\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m\right| < \varepsilon$ et donc aussi $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{z}{m}\right)^m\right| < \varepsilon$. La suite $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\neq 1}$ est donc une suite de Cauchy ; $\mathbb{C}$ étant complet, elle est convergente.

Partie C : L'exponentielle $\mathbb{R}$-solution de $y' = y, y(0) = 1$

1. Si $a \neq 0$ alors ϕ et $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ si et seulement si $\psi = x \mapsto a\phi(k\,x)$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$.

Si $a = 0$, ϕ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ si et seulement si $\psi = x \mapsto \phi(k\,x)$ est solution du problème $\mathsf{PC}_{k,0}$.

Ceci résulte immédiatement du théorème de dérivation d'une application composée et de la relation valable pour tout x, $\psi'(x) = k\,a\phi'(k\,x)$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$;

Si ϕ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,a}$ alors ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori continue et les égalités $\phi' = \phi$ et $\phi(0) = a$ montrent que ϕ est la primitive de ϕ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur a en 0 donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = a + \displaystyle\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$.

Réciproquement, si ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\phi(x) = a + \displaystyle\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$, alors ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\phi'(x) = \phi(x)$; par ailleurs $\phi(0) = a$.

3. 3.1. La clef est la linéarité des problèmes PC ; si ϕ_1 et ϕ_2 sont $\mathbb{R}$-solutions du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$, alors $\phi_1 - \phi_2$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$. Par ailleurs, la fonction nulle est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$. L'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ implique donc l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$. (La réciproque est vraie, mais pas utile pour la suite.)

3.2. Soit $T \in \mathbb{R}$; on procède par récurrence ; pour $n = 0$, ϕ étant continue sur le segment d'extrémités 0 et T, elle y est bornée, donc il existe M tel que, pour tout x entre 0 et T, on a : $|\phi(x)| \leqslant M$.

Soit ensuite $n \geqslant 0$ et supposons que pour tout x entre 0 et T, $|\phi(x)| \leqslant M\frac{|x|^n}{n!}$.

on sait que $\phi(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$, donc : $|\phi(x)| = \left|\displaystyle\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{sgn}\,(x) \displaystyle\int_0^x |\phi(t)|\,\mathrm{d}t$, puis :
$|\phi(x)| \leqslant \mathrm{sgn}\,(x) \displaystyle\int_0^x M\frac{|t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{sgn}\,(x) \displaystyle\int_0^x \frac{M}{n!}\mathrm{sgn}\,(x)^n\, t^n\,\mathrm{d}t = \mathrm{sgn}\,(x)^{n+1}\, \frac{M}{(n+1)!}\left[t^{n+1}\right]_0^x = \dfrac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

(On peut aussi proposer une rédaction distinguant les cas T positif, T négatif. Une variante consiste à utiliser l'inégalité des accroissements finis et l'égalité $\phi' = \phi$.)

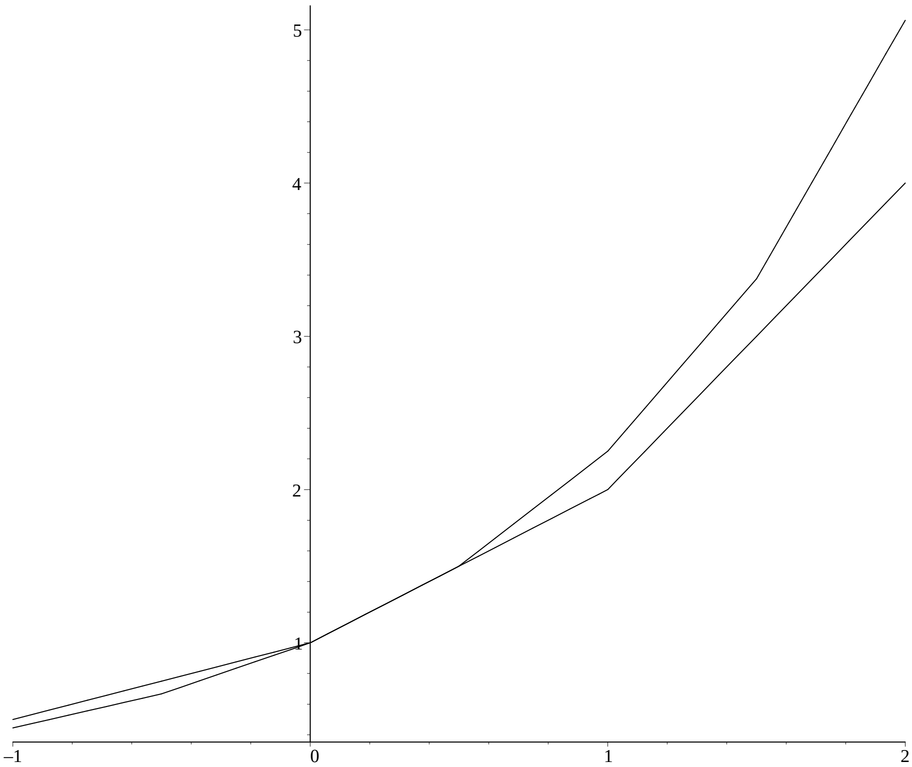
La propriété est héréditaire à partir de 0, donc démontrée par récurrence pour tout n.

On sait qu'à T fixé, $|T|^n = o(n!)$; on en déduit que $\left(M\frac{|T|^n}{n!}\right)$ converge vers 0 et donc, à nouveau le théorème de passage à la limite dans les inégalités fournit $|\phi(T)| \leqslant 0$ et donc $\phi(T) = 0$. T étant arbitraire, ϕ est identiquement nulle.

3.3. La question précédente prouve l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$; celle pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ en découle.

Soit $h > 0$.

4. 4.1.



4.2. L'application ψ_h est obtenue en appliquant la méthode d'approximation d'Euler pour une équation différentielle avec un pas h, la différence étant ici qu'on travaille sur $\mathbb{R}$ tout entier et pas seulement sur un segment.

Posons $x_n = n\,h$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; on prend $\psi(x_0) = \psi(0) = 1$ puisque c'est la condition initiale du problème.

Puis, sur l'intervalle $[x_0, x_1]$, ψ est prise affine, avec un taux d'accroissement égal à $\psi(x_0) = 1$ (puisqu'on veut que ψ approche une solution de l'équation différentielle $y' = y$.

donc $\psi(x_1) = \psi(x_0 + h)$ est pris égal à $\psi(x_0) + h\psi'(x_0) = 1 + h$. On itère alors le procédé : une fois défini $\psi(x_n)$, sur $[x_n, x_{n+1}]$ ψ est prise affine avec un taux d'accroissement égal à sa valeur en x_n.

donc $\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n) + h\,\psi'(x_n) = (1+h)\psi(x_n)$; ainsi les $\psi(x_n)$ forme une suite géométrique de raison $(1+h)$, d'où l'expression $\psi(x_n) = (1+h)^n$.

On procède de même sur $\mathbb{R}^-$.

5. L'énoncé sous-entend que les conditions données sont cohérentes et définissent ψ_h de façon unique.

5.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n = \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right) \in \mathbb{Z}$; on a donc $n\,h \leqslant x < (n+1)\,h$.

Si on pose $x = (1-\alpha)\,n\,h + \alpha(n+1)\,h$ avec $\alpha = \frac{x - n\,h}{h} \in [0, 1[$, on a :

$\psi_h(x) = (1-\alpha)\psi_h(n\,h) + \alpha\psi_h((n+1)\,h) = (1-\alpha)\,(1+h)^n + \alpha\,(1+h)^{n+1} = (1+h)^n\,(1+\alpha\,h)$
donc $\psi_h(x) = (1+h)^n\,(1+x-n\,h)$; c'est la relation demandée.

On peut aussi vérifier que l'application $x \mapsto (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}\left(1+x-h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)$ satisfait aux deux conditions de définition de ψ_h.

5.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$; sur l'intervalle fermé $[n\,h;(n+1)\,h]$, ψ_h est affine donc sa restriction y est dérivable et, par définition même, de dérivée constante égale à $(1+h)^n = (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$.

On a donc, pour tout $x,y \in [n\,h,(n+1)\,h]$ $\displaystyle\int_x^y (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t = \psi_h(y) - \psi_h(x)$.

(La notion de primitive généralisée d'une application continue par morceaux n'est pas au programme, mais peut être avantageusement utilisée ici.)
Soit alors $x \in \mathbb{R}$ et $n = \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)$; en utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\,h}^{(k+1)\,h}(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t + \int_{n\,h}^{x}(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t$$

(en donnant à la somme le sens adéquat si $n \leqslant 0$) ; d'où

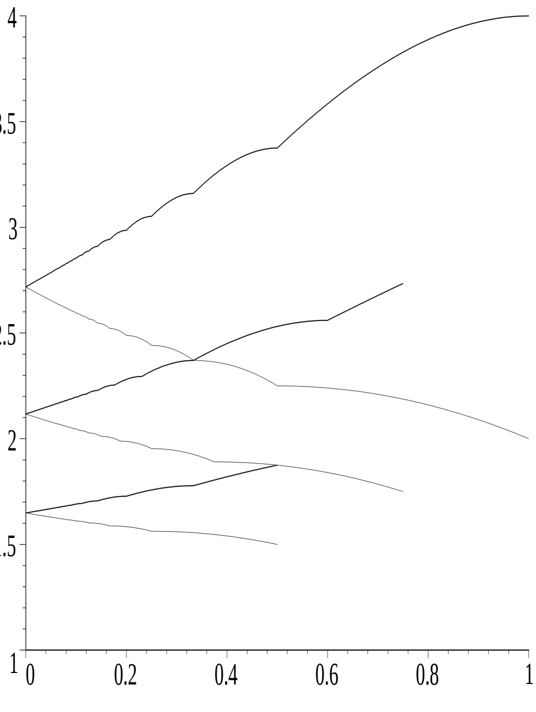
$$\int_0^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\psi_h((k+1)\,h) - \psi_h(k\,h)\right] + \psi_h(x) - \psi_h(n\,h) = \psi_h(x) - \psi_h(0) = \psi_h(x) - 1.$$

5.3. Soient $x,y \in \mathbb{R}$; on a : $\psi_h(y) - \psi_h(x) = \displaystyle\int_x^y (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t$; or $t \mapsto (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $h > 0$ et que l'application partie entière l'est ; en utilisant les inégalités de la moyenne, on a alors :
si $x \leqslant y$, en minorant : $\displaystyle\int_x^y (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t \geqslant (y-x)\,(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$
et si $x \geqslant y$, en majorant : $\displaystyle\int_y^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}t \leqslant (x-y)\,(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$ qui redonne bien l'inégalité voulue en passant aux opposés.

5.4. Pour $x < y$, on a $\dfrac{\psi_h(y) - \psi_h(x)}{y-x} \geqslant (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$; le membre de gauche est le coefficient directeur de la sécante joignant les points $(x,\psi_h(x))$ et $(y,\psi_h(y))$ et le membre de droite, la pente du segment (de droite si ambiguïté) de la représentation graphique de ψ_h passant par $(x,\psi_h(x))$. L'inégalité est graphiquement équivalente à la convexité.

5.5. La croissante résulte de la positivité de $t \mapsto (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}$. La convexité est une conséquence de l'inégalité du 5.3 et de la sous-partie III de la première partie.

6. 6.1.



Représentations graphiques pour $x \in \{0,5;0,75;1\}$

On conjecture que chaque α_x (resp. β_x) est (strictement) décroissante (resp. croissante), continue, dérivable par morceaux, et bornée, sur $]0,x]$, en particulier au voisinage de 0, et enfin que α_x et β_x possède une limite commune en 0.

6.2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$; sur l'intervalle *ouvert* $\left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right[$, $\alpha_x(h) = (1+h)^p(1+x-h\,p)$ donc α_x y est dérivable et $\alpha'_x(h) = (1+h)^{p-1}p\,(x-h\,(p+1)) < 0$ donc α_x est (strictement) décroissante sur cet intervalle. (La stricte décroissance n'étant pas utile pour la suite.)

Ensuite, la même expression de α_x donne $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ <}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$ et $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p+1}\\ >}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p+1}\right)^{p+1}$ et donc en décalant, $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ >}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ <}} \alpha_x(h) = \lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\ >}} \alpha_x(h) = \alpha_x\left(\frac{x}{p}\right)$ d'où la continuité de α_x en chaque $\frac{x}{p}$ et finalement sur $]0,x]$.

Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit la décroissance de α_x sur chaque *segment* $[\frac{x}{p}, \frac{x}{p+1}]$, puis α_x étant décroissante par morceaux *fermés* sur $]0,x]$, on en déduit la décroissance sur $\bigcup\limits_{p\geqslant 1}[\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}] =]0,x]$.

6.3. Soit $h \in]0,x]$; on a, par croissance de ψ_h et croissance de β_x : $\alpha_x(h) = \psi_h(x) \leqslant \psi_h(x(1+h)) = \beta_x(h) \leqslant \beta_x(x)$. Donc α_x est majorée sur $]0,x]$.

6.4. Le théorème de la limite monotone bornée permet alors de conclure à l'existence d'une limite finie pour α_x en 0, qui est aussi $\lim\limits_{h\to 0} \psi_h(x)$. En évidence, $\lim\limits_{h\to 0} \psi_h(0) = 1$.

7. 7.1. Le théorème de passage à la limite dans les inégalités fournit immédiatement la conservation de la positivité, de la croissance et de la convexité de ψ_h. De plus, d'après la sous-partie IV de la première partie, on en déduit que $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

7.2. Cela résulte ici encore d'un passage à la limite dans les inégalités obtenues à la question 5.3.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a :$\frac{x}{h} - \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right) \in [0,1[$;
donc d'une part on a : $\left(1+x-h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right) = \left(1+h\left(\frac{x}{h} - \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)\right) \geqslant 1 > 0$
et d'autre part, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}} \left(1+x-h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right) = 1$
donc $(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)} = \dfrac{\psi_h(x)}{\left(1+x-h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)}$ a aussi pour limite $\mathcal{E}(x)$ lorsque h tend vers 0.

7.3. Les résultats de la sous-partie III de la première partie permette d'en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(0) = \displaystyle\int_0^x \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathcal{E}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après la question 2 de cette partie que $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

8. 8.1. D'après la question 1 de cette partie, l'unique $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ est : $\phi(x) = a\mathcal{E}(k\,x)$. (formule qui vaut même si $a = 0$).

8.2. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé ; le problème $\mathsf{PC}_{1,\mathcal{E}(y)}$ possède une unique $\mathbb{R}$-solution qui est, d'après la question précédente, $\phi(x) = \mathcal{E}(y)\mathcal{E}(x)$. Or il est clair que $\psi(x) = \mathcal{E}(y+x)$ est aussi $\mathbb{R}$-solution de ce problème ; l'unicité permet d'en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(y+x) = \mathcal{E}(y)\mathcal{E}(x)$.

9. D'après la partie II, $\boldsymbol{e}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$; l'unicité fournit ici encore $\boldsymbol{e} = \mathcal{E}$.