Concours PT
Maths

2004

PT I-B

L'usage des calculatrices est interdit.

Partie A

$\boxed{1\ )}$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ deux éléments de S_2.

$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. avec $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} \geqslant 0$, évidemment.

$$\forall i = 1, 2,\ \sum_{j=1}^{2} c_{ij} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{2} b_{kj}}_{=1}\right) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} = 1$$

Donc, S_2 est stable par le produit matriciel.

$\boxed{2\ )}$

(a).

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = aA + bI_2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{3}a + b & = & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3}a & = & \frac{5}{9} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \frac{5}{6} \\ b & = & \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

Récoproquement, il est clair que $\boxed{\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2 = A^2}$.

(b). En posant $a_1 = 1, b_1 = 0$, on a $A = a_1A + b_1I_2$. On a vu qu'en posant $a_2 = \frac{5}{6}, b_2 = \frac{1}{6}$, $A^2 = a_2A + b_2I_2$.

Faisons l'hypothèse de récurrence, que pour $n \geqslant 1$, $A^n = a_nA + b_nI_2$, alors :

$$A^{n+1} = A.A^n = a_nA^2 + b_nA = a_n\left(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2\right) + b_nA = \left(\frac{5}{6}a_n + b_n\right)A + \frac{1}{6}a_nI_2$$

On vient de montrer la propriété par récurrence.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ A^n = a_nA + b_nI_2,\ \left\{ \begin{array}{lcl} a_1 & = & 1 \\ b_1 & = & 0 \end{array} \right.,\ \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{5}{6}a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{6}a_n \end{array} \right.}$$

On constate :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n}$$

Donc $\boxed{(1)\ \forall n \geqslant 1,\ a_n + b_n = a_1 + b_1 = 1}$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{5}{6}a_n + b_n = \frac{5}{6}a_n + (1-a_n) = -\frac{1}{6}a_n + 1 \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{6}(1-b_n) = -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & -\frac{1}{6}a_n + 1 \\ b_{n+1} & = & -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6} \end{array}\right.}$$

(c).

$$\forall n\geqslant 1,\ a_{n+1} = -\frac{1}{6}a_n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} - l = -\frac{1}{6}(a_n - l) \text{ si } \boxed{l = \frac{6}{7}}$$

La suite $(u_n = a_n - l)$ est géométrique de raison $q = -\frac{1}{6}$. Donc :

$$\forall n\geqslant 1,\ u_n = q^{n-1}u_1 \Longrightarrow \boxed{\forall n\geqslant 1,\ a_n = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$

Comme $\forall n\geqslant 1,\ b_n = 1 - a_n$, $\boxed{\forall n\geqslant 1,\ b_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n}}$.

(d). Clairement, $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{6}{7},\ b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{7}}$.

Donc :

$$A^n = a_nA + b_nI_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{A^\infty = \frac{6}{7}A + \frac{1}{7}I_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \in S_2}$$

$\boxed{3\ )}$

On pose $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

(a). Calculons le polynôme caractéristique $\chi_b(\lambda)) = \det(A - \lambda I_3 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} - \lambda & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} - \lambda \end{vmatrix}$.

On développe bien sur par rapport à la dernière colonne :

$$\chi_B(\lambda) = \left(\frac{4}{9} - \lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{26}{21}\lambda + \frac{5}{21}\right)$$

Une racine évidente de $\lambda^2 - \frac{26}{21}\lambda + \frac{5}{21}$ est bien sûr 1, l'autre vaut le produit des racines, i.e $\frac{5}{21}$.

$$\boxed{\text{Les trois valeurs propres de } B \text{ sont } \lambda_1 = \frac{5}{21} < \lambda_2 = \frac{4}{9} < \lambda_3 = 1}$$

(b). La matrice B a son polynôme caractéristique scindé simple sur $\mathbb{R}$. C'est une condition **suffisante** de diagonalisation de B. Les sous-espaces propres associés sont des droites.

B est donc semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \frac{5}{21} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de ses valeurs propres.

(c). Si on considère $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$, B est dans cette base la matrice d'un endomorphisme f, diagonalisable d'après ce qui vient d'être dit.
Les sous-espaces propres de fi sont les droites :

$$\boxed{\begin{gathered} \mathrm{SEP}(\lambda_1) = \ker(f - \lambda_1 I_3) = \mathrm{Vect}\left(e'_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c} \right) \\ \mathrm{SEP}(\lambda_1) = \ker(f - \lambda_2 I_3) = \mathrm{Vect}\left(e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c} \right) \\ \mathrm{SEP}(\lambda_1) = \ker(f - \lambda_3 I_3) = \mathrm{Vect}\left(e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c} \right) \end{gathered}}$$

$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de vecteurs propres de f. $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
Si on considère la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$\boxed{P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \; P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 10 & -6 & 16 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = PDP^{-1} \Longrightarrow (2)\, B^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{21}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{4}{9}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

$$\boxed{(3)\; B^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{16}\left(\frac{5}{21}\right)^n + \frac{9}{16} & -\frac{7}{16}\left(\frac{5}{21}\right)^n + \frac{7}{16} & 0 \\ -\frac{9}{16}\left(\frac{5}{21}\right)^n + \frac{9}{16} & \frac{9}{16}\left(\frac{5}{21}\right)^n + \frac{7}{16} & 0 \\ \frac{1}{16}\left(\frac{5}{21}\right)^n - \frac{5}{8}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{9}{16} & -\frac{1}{16}\left(\frac{5}{21}\right)^n - \frac{3}{8}\left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{7}{16} & \left(\frac{4}{9}\right)^n \end{pmatrix}}$$

(d). La formule (2) montre que (B^n) a une limite B^∞ :

$$\boxed{B^\infty = PD^\infty P^{-1},\; D^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

B^∞ est donnée par la formule (3) :

$$\boxed{B^\infty = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in S_3, \text{ clairement}}$$

$\boxed{4\ )}$

On pose $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a). Les valeurs propres de la matrice triangulaire C sont ses éléments diagonaux : $\frac{1}{2}$, d'ordre de multiplicité 2, et 1 valeur propre simple.

(b).

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ J^n = K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c).

$$\boxed{C = \frac{1}{2}(I_3 + J)}$$

Comme la matrice identité I_3 commute avec toute matrice, donc avec J, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \geqslant 2,\ C^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, J^k I_3^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, J^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(I_3 + nJ + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k K\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$, on a :

$$\boxed{(4)\ C^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_3 + nJ + (2^n - n - 1)K) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

(d). La formule (3) montre que :

$$\boxed{C^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_3}$$

Partie B

$\boxed{1\ )}$

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Posons $C = AB = [c_{ij}]$.

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, r\}^2,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$$

Donc, si $A \in S_r$ et $B \in S_r$, il est clair que C est à éléments positifs ou nuls.
Si $A \in S_r^*$ et $B \in S_r^*$, il est clair que C est à éléments strictement positifs. De plus :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\},\ \sum_{j=1}^{r} c_{ij} = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{r} \left(a_{ik} \underbrace{\sum_{j=1}^{r} b_{kj}}_{=1}\right) = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} = 1$$

On a permuté l'ordre des sommations finies, ce qui traduit la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
Ceci prouve la stabilité de S_r et de S_r^* par le produit matriciel.

$\boxed{2\ )}$

(a). Une récurrence simple, utilisant la stabilité par multiplication de S_r, établirait que si A est une matrice stochastique, alors, quel que soit n entier naturel non nul, A^n est aussi une matrice stochastique.

(b). Si A est une matrice stochastique :

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_{1j}\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_{rj}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 1\times\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

On a montré que 1 est valeur propre de A, un vecteur propre associé étant $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

(c). On suppose que A^∞ existe, comme limite donc de la suite de matrices (A^n). On a :

$$\forall (i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2,\ a_{ij}^\infty = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{a_{ij}^{(n)}}_{\geqslant 0}\geqslant 0$$

De plus :

$$\forall i\in\{1,\ldots,r\},\ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^\infty = \sum_{j=1}^{r}\lim_{n\to+\infty} a_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(n)}}_{=1} = 1$$

On a utilisé la question B-2-(a) et montré ainsi que la limite éventuelle A^∞ de la suite des puissances d'une matrice stochastique est aussi stochastique.
On a bien sûr :

$$A^{n+1} = AA^n = A^nA$$

Traduisons la première égalité sur le terme général :

$$\forall (i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2,\ a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}a_{kj}^{(n)}$$

Si on passe à la limite pour $n\to+\infty$ dans cette égalité, on obtient :

$$\forall (i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2,\ a_{ij}^{\infty} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}a_{kj}^{\infty}$$

Ce qui traduit $A^\infty = AA^\infty$. En utilisant $A^{n+1} = A^nA$, on obtiendrait de même $A^\infty = A^\infty A$.

$\boxed{3\ )}$

Soit $M = [m_{ij}]$, une matrice à diagonale strictement dominante.

Supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, $X\neq 0$, tel que $MX = 0$.

Il existe donc $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$, tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} |x_j|$. Comme $X \neq 0$, nécessairement $|x_{i_0}| > 0$.
Prenons la i_0-ième composante de l'égalité $MX = 0$:

$$\sum_{j=1}^{r} m_{i_0 j} x_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m_{i_0 j} x_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} m_{i_0 j} x_j$$

Si on utilise la valeur absolue :

$$|m_{i_0 j} x_{i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |m_{i_0 j} x_j| \quad \Longleftrightarrow \quad |m_{i_0 j}|\,|x_{i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |m_{i_0 j}|\,|x_j|$$

En divisant par $|x_{i_0}| > 0$, on obtient :

$$|a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \overbrace{\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}}^{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|$$

Or $|a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|$ contredit l'hypothèse que M est une matrice à diagonale strictement dominante.
Donc, si M est une matrice à diagonale strictement dominante :

$$MX = 0 \Longrightarrow X = 0$$

Ainsi $\ker M = \{0\}$.
Ce qui équivaut à dire que $\boxed{\text{toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.}}$
La contraposée sera utilisée :
$\boxed{\text{Si une matrice carrée n'est pas inversible, elle n'est pas à diagonale strictement dominante.}}$
$\boxed{4\ )}$
On considère $A = [a_{ij}] \in S_r^*$. On pose $B = A - I_r$. La matrice carrée C obtenue en supprimant les dernière ligne et colonne de B est d'ordre $(r-1)$.

(a).

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & \ldots & a_{1,r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & \ldots & a_{r-1,r-1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, (r-1)\},\ |c_{ii}| = |a_{ii} - 1| = 1 - a_{ii} = \sum_{j=1..r, j \neq i} a_{ij} \underset{a_{ir}>0}{>} \sum_{\left\{\substack{j = 1..(r-1) \\ j \neq i}\right.} a_{ij} = \sum_{\left\{\substack{j = 1..(r-1) \\ j \neq i}\right.} |c_{ij}|$$

On a montré que $\boxed{C \text{ est à diagonale strictement dominante.}}$

(b). Nous avons vu à la question B-2-(b) que, si $A \in S_r$, elle admet 1 pour valeur propre et que le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre pour 1.
On va montrer, dans le cas où $A \in S_r^*$, le sous-espace propre associé à 1 est une droite, dirigée donc par U.

Deux preuves différentes :
Première preuve

Notons $(B_1, \dots, B_{r-1}, B_r)$ les colonnes de $B = A - I_r$. Notons $(C_1, \dots, C_{r-1})$ les colonnes de C.

$$B_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ a_{r,1} \end{pmatrix}, \dots, B_{r-1} = \begin{pmatrix} C_{r-1} \\ a_{r,r-1} \end{pmatrix}$$

Comme C est à diagonale strictement dominante, elle est inversible, d'après la question B-3. Son rang est donc $(r-1)$. Ses vecteurs colonnes sont donc libres.
Montrons que $(B_1, \dots, B_{r-1})$ sont libres :

$$\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j B_j = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j C_j = 0 \underset{\text{les } C_j \text{ sont libres}}{\Longrightarrow} \forall j = 1..(r-1),\ \lambda_j = 0$$

c.q.f.d.
Le rang de $B = A - I_r$ est donc supérieur ou égal à $(r-1)$. D'après la formule du rang :

$$r = \operatorname{rg} A + \dim \ker(A - I_r) \Longrightarrow \dim(\ker(A - I_r) = \mathrm{SEP}(1) \leqslant 1$$

Or 1 est valeur propre de A. Donc $\dim \mathrm{SEP}(1) \geqslant 1$. En conclusion :

$$\boxed{\dim \mathrm{SEP}(1) = 1}$$

$\mathrm{SEP}(1)$ est la droite dirigée par $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Deuxième preuve

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AX = X \quad \Longleftrightarrow \quad BX = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcr} (a_{1,1} - 1)x_1 + \ldots + a_{1,r-1}x_{r-1} & = & -a_{1,r}x_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,1}x_1 + \ldots + (a_{r-1,r-1} - 1)x_{r-1} & = & -a_{r-1,r}x_r \\ a_{r,1}x_1 + \ldots + a_{r,r-1}x_{r-1} & = & -(a_{r,r}1)x_r \end{array} \right.$$

Si on considère seulement les $(r-1)$ premières équations de ce système , X vérifie nécessairement :

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} \end{pmatrix} = -x_r \begin{pmatrix} a_{1,r} \\ \vdots \\ a_{r-1,r} \end{pmatrix}$$

Or, C est à diagonale strictement dominante, donc inversible, d'après la question B-3. Donc, si $AX = 1 \times X$, nécessairement :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} \end{pmatrix} = -x_r C^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,r} \\ \vdots \\ a_{r-1,r} \end{pmatrix}$$

Posons $C^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,r} \\ \vdots \\ a_{r-1,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{r-1} \end{pmatrix}$. On vient de montrer que tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

tel que $AX = 1 \times X$ vérifie nécessairement :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -x_r \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{r-1} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que :

$\boxed{\text{Le sous-espace propre SEP(1) d'une matrice } A \in S_r^* \text{ est de dimension 1 : c'est la droite dirigée par } U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$

(c). **Nous traitons la première partie de cette question dans le cas général d'une matrice stochastique, pas nécessairement au sens strict**.

$\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A \in S_r$ si et seulement si il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, $\boxed{X \neq 0}$ tel que $AX = \lambda.X$. Ce qui équivaut à écrire qu' il existe $X \neq 0$, tel que $(A - \lambda.I_r).X = 0$, i.e $(A - \lambda.I_r)$ n'est pas inversible.

La contraposée de la proposition citée à la question B-3 nous apprend donc, que si λ est valeur propre de A, alors nécessairement, $A - \lambda.I_r$ n'est pas à diagonale strictement dominante :

$$\exists i \in \{1, \ldots, r\},\ |a_{ii} - \lambda| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \sum_{j \neq i} a_{ij} = 1 - a_{ii}$$

Ce qui implique $|\lambda| - |a_{ii}| \leqslant |\lambda - a_{ii}| \leqslant 1 - a_{ii} \Longrightarrow \lambda \leqslant 1$.

Donc $\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \in S_r \text{ sont de module inférieur ou égal à 1.}}$

Plaçons-nous dans le cas où la matrice est stochastique stricte.

Deux preuves différentes :

Première preuve.

L'inégalité démontrée nous apprend aussi que l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ des valeurs propres de A vérifie :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1..r} B_i(a_{ii}, r_i = 1 - a_{ii})$$

$B_i(a_{ii}, r_i = 1 - a_{ii})$ désigne la boule ouverte du plan complexe de centre $a_{ii} \in]0, 1[$, de rayon $r_i = 1 - a_{ii} \in]0, 1[$.

$\boxed{\text{Le dessin illustre le fait que le nombre 1 est la seule valeur propre de module égal à 1 de } A \in S_r^*. \text{ Les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.}}$

Deuxième preuve.

Si λ est de module 1, et différente de 1 $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, $\cos\theta < 1$.

$$|\lambda - a_{ii}|^2 = |(\cos\theta - a_{ii}) + \mathrm{i}\sin\theta|^2 = \\ (\cos\theta - a_{ii})^2 + \sin^2\theta = 1 + a_{ii}^2 - 2a_{ii}\cos\theta \underset{-a_{ii}\cos\theta > -a_{ii}}{>} 1 + a_{ii}^2 - 2a_{ii} = (1 - a_{ii})^2$$

Ce qui est contadictoire avec l'inégalité :

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant 1 - a_{ii}$$

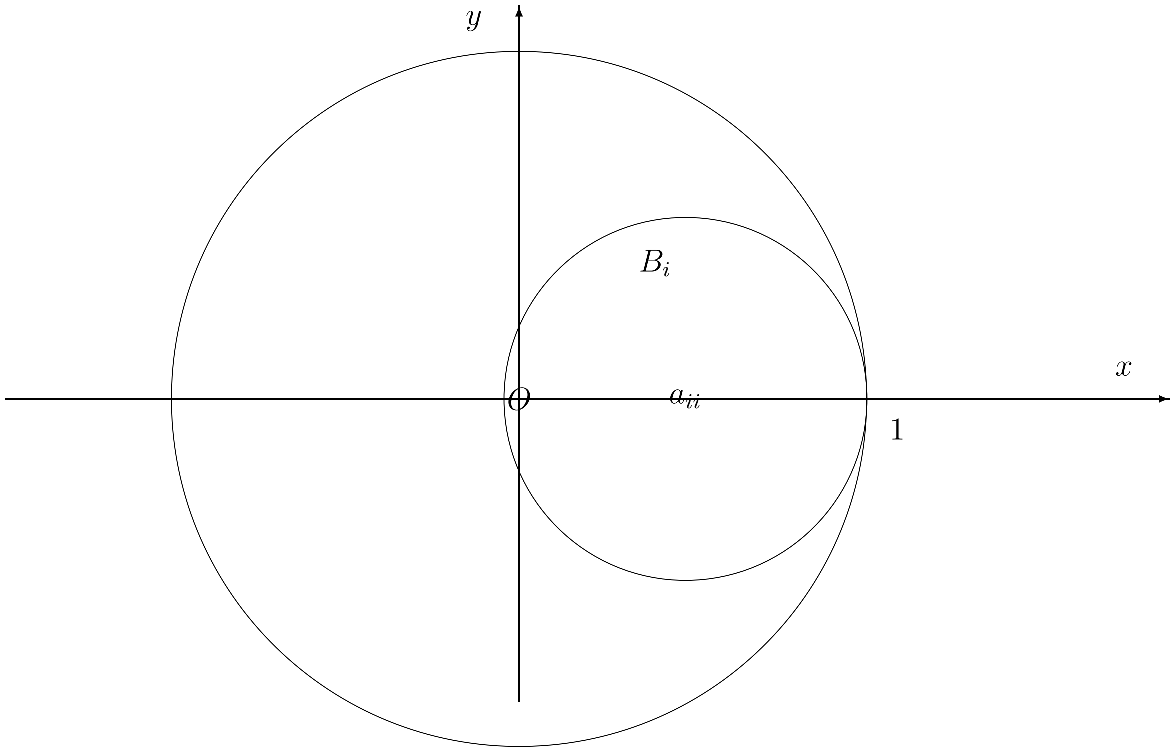

FIG. 1 – Valeurs propres de $A \in S_r^*$

Donc :

$\boxed{\text{si } A \in S_r^*, \text{ 1 est la seule valeur propre de module 1, les autres sont de module strictement inférieur à 1.}}$

5)

On a vu à la question B-4-(c) que $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \in S_r \text{ sont de module inférieur ou égal à 1.}}$ Le déterminant est le produit des racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique de A, i.e ici les valeurs propres ; il est donc inférieur ou égal à1.

6)

Montrons par récurrence sur r, que, pour toute matrice $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, telle que :

$$(\mathcal{P})\, \forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2,\, m_{ij} \in]0,1[\text{ et } \forall i \in \mathbb{N}_r,\, \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \leqslant 1$$

on a $|\det M| < 1$.

Pour $r = 1$, la propriété est claire, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1 étant égal à son unique coefficient.

Faisons l'hypothèse de récurrence : toute matrice d'ordre $r-1$, dont tous les termes sont strictement compris entre 0 et 1 dont la somme des termes de chaque ligne est inférieure ou égale à 1 a son déterminant en module strictement inférieur à 1. Soit $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. Il est clair que tous les sous-matrices carrées d'ordre $(r-1)$ vérifient aussi $(\mathcal{P})$. développons le déterminant de M par rapport à la première ligne :

$$\det M = \sum_{j=1}^{r} a_{1j}(-1)^{1+j} D_{1j}$$

Les D_{1j} étant des déterminants de sous-matrices carrées d'ordre $(r-1)$ de A vérifient, d'après l'hypothèse de récurrence :$\forall j \in \mathbb{N}_r$, $|D_{1j}| < 1$. Comme les a_{1j} sont strictement positifs :

$$|\det M| \leqslant \sum_{j=1}^{r} a_{1j}|D_{1j}| < \sum_{j=1}^{r} a_{1j} \leqslant 1 \Longrightarrow |\det M| < 1$$

On a montré par récurrence sur r, que, pour toute matrice $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, telle que :

$$(\mathcal{P})\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2,\ m_{ij} \in]0,1[\text{ et } \forall i \in \mathbb{N}_r,\ \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \leqslant 1$$

on a $|\det M| < 1$.
C'est le cas en pariculier pour une matrice stochastique stricte qui, évidemment, vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.

$$\boxed{A \in S_r^* \Longrightarrow |\det M| < 1}$$

$\boxed{7\ )}$

(a). Soit $A = [a_{ij}] \in S_r^*$. Les coefficients ont un minimum $\alpha > 0$. Soit $\varepsilon = \min(\alpha, \dfrac{1}{4})$. Evidemment $\varepsilon \in]0, \dfrac{1}{2}[$ et $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2$, $a_{ij} \geqslant \varepsilon$.

(b). Comme $A^{n+1} = AA^n$, alors :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2,\ a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} a_{kj}^{(n)}$$

(c). On va s'appuyer dans toute cette question sur le fait que, quel que soit $j \in \mathbb{N}_r$, il existe $i \in \mathbb{N}_r$ tel que $\alpha_j^{(n)} = a_{ij}^{(n)}$ et $i' \in \mathbb{N}_r$ tel que $\beta_j^{(n)} = a_{i'j}^{(n)}$.

Comme $\forall i \in \mathbb{N}_r$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik} = 1$, on peut écrire :

$$a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{a_{ik}}_{\geqslant \varepsilon} \underbrace{\left(a_{kj}^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right)}_{\geqslant 0} \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\left(a_{kj}^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right)}_{\geqslant 0}$$

Cette somme de termes positifs est supérieure ou égale à chacun de ses termes. En particulier :

$$a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geqslant \varepsilon(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}) = \varepsilon \gamma_j^{(n)}$$

De même :

$$\beta_j^{(n)} - a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{a_{ik}}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\beta_j^{(n+1)} - a_{kj}^{(n)}\right)}_{\geqslant 0} \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\left(\beta_j^{(n+1)} - a_{kj}^{(n)}\right)}_{\geqslant 0}$$

Cette somme de termes positifs est supérieure ou égale à chacun de ses termes. En particulier :

$$\beta_j^{(n)} - a_{ij}^{(n+1)} \geqslant \varepsilon(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}) = \varepsilon \gamma_j^{(n)}$$

(d). Soit $j \in \mathbb{N}_r$.

$$\forall i \in \mathbb{N}_r, \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \\ \beta_j^{(n)} - a_{ij}^{(n+1)} \end{array} \right. \geqslant \varepsilon \gamma_j^{(n)} \geqslant 0 \underset{\text{en particulier}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_j^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \\ \beta_j^{(n)} - \beta_j^{(n+1)} \end{array} \right. \geqslant \varepsilon \gamma_j^{(n)} \geqslant 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_j^{(n)} \leqslant \alpha_j^{(n+1)} \\ \beta_j^{(n+1)} \leqslant \beta_j^{(n)} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\boxed{\alpha_j^{(n)} \leqslant \alpha_j^{(n+1)} \leqslant \beta_j^{(n+1)} \leqslant \beta_j^{(n)}}$$

Et, par addition :

$$(\alpha_j^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)}) + (\beta_j^{(n)} - \beta_j^{(n+1)}) \geqslant 2\varepsilon\gamma_j^{(n)} \Longrightarrow -\gamma_j^{(n+1)} + \gamma_j^{(n)} \geqslant 2\varepsilon\gamma_j^{(n)}$$

D'où :

$$\boxed{\varepsilon\gamma_j^{(n+1)} \leqslant \varepsilon\gamma_j^{(n)}(1-2\varepsilon)}$$

(e). Posons $q = 1 - 2\varepsilon \in]0,1[$. par une récurrence claire, on trouve :

$$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)} = \gamma_j^{(n)} \leqslant q^{(n-1)}\gamma_j^{(1)} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{|q|<1}} 0$$

$$\boxed{\gamma_j^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Comme $\alpha_j^{(n)} = \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\alpha_j^{(n)} \leqslant \alpha_j^{(n+1)} \leqslant \beta_j^{(n+1)} \leqslant \beta_j^{(n)}$, le théorème des suites adjacentes permet de conclure :

Les suites adjacentes $(\alpha_j^{(n)})$ et $(\beta_j^{(n)})$ convergent et ont la même limite. Donc, quel que soit $j \in \mathbb{N}_r$, toutes les suites $(a_{ij}^{(n)})$, $i = 1..r$ convergent vers la même limite $l_j \geqslant 0$.

$$A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A^\infty = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_r \\ \dots & \dots & \dots \\ l_1 & \dots & l_r \end{pmatrix}$$

Notons que $\boxed{\text{les lignes de } A^\infty \text{ sont identiques.}}$

D'après la question B-2-(c), la matrice A^∞ est stochastique. Donc $l_1 + \ldots + l_r = 1$.

$\boxed{8\ )}$

$r = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

La matrice est bien élément de S_3^*. $A\infty$ existe et elle est stochastique. Ses lignes sont égales.

Ici, ${}^tA \in S_3^*$ aussi, donc (${}^tA^\infty$ existe, est stochastique et ses lignes sont identiques.

Or, évidemment $({}^tA)^\infty = ({}^t(A^\infty)$.

Donc, les colonnes de A^∞ sont identiques :

$$A^\infty = \begin{pmatrix} l_1 & l_1 & l_1 \\ l_2 & l_2 & l_2 \\ l_3 & l_3 & l_3 \end{pmatrix}$$

Comme elle est stochastique $3l_1 = 3l_2 = 3l_3 = 1$. Ainsi :

$$\boxed{A^\infty = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Par ailleurs, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda + \frac{1}{5})^2$.

A admet 1 et $-\frac{1}{5}$, de module strictement inférieur à 1, pour valeurs propres.