❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

L'objet de ce problème est de déterminer la forme générale sur $]\,0\,,+\infty\,[$ des solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \lambda^2\right) y = 0 \quad (\mathscr{E})$$

où λ est un réel positif non entier.

I. Etude de la fonction Bêta

u et v étant des réels strictement positifs, on pose :

$$B(u,v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\, dt \,.$$

1. Pour tout entier $n > 1$, on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [\,0\,,n\,]\,,$$

$$f_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [\,0\,,n\,]\,,$$

On désigne par f la fonction définie par : $f(x) = e^{-x}$.

a. Pour tout réel x strictement positif, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$.

b. n étant un entier strictement supérieur à 1, on introduit la fonction définie par :
$\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$ si $x \in [\,0\,,n\,]$, $\varphi_n(x) = 0$ si $x \notin [\,0\,,n\,]$.
Etudier les variations de φ_n (Pour déterminer le signe de φ_n ', on pourra étudier la fonction ψ_n, définie sur $[\,0\,,n\,[$ par : $\psi_n(x) = (n-1)\ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) + x$).

c. Montrer qu'il existe un unique réel α_n dans $]\,1\,,n\,[$ tel que φ_n soit maximale en α_n.

d. Montrer que $\varphi_n(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n}{n} e^{-\alpha_n}$.

e. Montrer que : $0 \le \varphi_n(\alpha_n) \le \dfrac{1}{ne}$ (on pourra par exemple étudier la fonction $x \mapsto x e^{-x}$).

f. Tracer le graphe de φ_n sur $[0, n]$.

2. *a*. Montrer que l'on peut écrire : $B(u, v) = \int_0^1 (1-t)^{v-1} t^{u-1} \, dt$.

   b. Montrer que : $B(u, v) = B(v, u)$.

   c. Démontrer l'égalité suivante : $B(u+1, v) = \dfrac{u}{u+v} B(u, v)$.

3. Pour tout entier n strictement supérieur à 1, et tout réel $x > 0$, on pose : $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, dt$.

   a. Par un changement de variable judicieux, montrer que : $I_n(x) = n^x B(n+1, x)$.

   b. En déduire la valeur de $I_n(x)$.

II. Etude de la fonction Gamma

Soit Γ la fonction définie par : $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt$ pour $x > 0$.

1. Vérifier la convergence de l'intégrale définissant Γ .

2. Pour tout entier $n > 1$, on considère la fonction Γ_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\Gamma_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{x-1} \, dt$.

   a. Les fonctions Γ_n sont-elles continues ?

   b. Pour tout réel x strictement positif, montrer que $\Gamma_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   c. Que vaut $\Gamma(1)$?

   d. Calculer, pour tout entier strictement positif n, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Pour tout réel $x > 1$, déterminer une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x-1)$.
   Montrer que cette formule permet alors de prolonger Γ à $]-1, 0[$.
   En déduire que l'on peut prolonger Γ à $]-\infty, 0[\setminus \mathbb{Z}^-$.

4. Soit x un réel strictement positif.

   a. Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\int_A^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt \le \varepsilon$$

   b. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \ge n_0$:

$$\left| \int_0^A e^{-t} t^{x-1} \, dt - \int_0^A t^{x-1} f_n(t) \, dt \right| \le \varphi_n(\alpha_n) \int_0^A t^{x-1} \, dt$$

   c. En déduire l'existence d'un entier n_1 tel que, pour $n \ge n_1$:

$$\left| \int_0^A e^{-t} t^{x-1} \, dt - \int_0^A t^{x-1} f_n(t) \, dt \right| \le \varepsilon$$

d. Quelle est la limite de $I_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

e. En déduire : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x \dfrac{n!}{(x+n)(x+n-1)\ \ldots\ x}$.

III. Equation de Bessel

On utilisera, dans cette partie, le prolongement de la fonction Γ à $]-\infty, 0[\ \setminus \mathbb{Z}^-$ introduit dans la partie II.

1. *a.* λ étant le réel positif non entier intervenant dans **($\mathscr{E}$)**, soit $a(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda)\, x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$, dépendant du réel λ.
   Pour x dans $]0, R[$, on pose : $y(x) = x^{\lambda}\, a(x)$.

   On suppose que la fonction y est solution de **($\mathscr{E}$)** sur $]0, R[$, et n'est pas identiquement nulle. Montrer que, pour $n \geq 2$:

$$a_n(\lambda) = \frac{-a_{n-2}(\lambda)}{n^2 + 2n\lambda}$$

   b. Donner la valeur du coefficient $a_1(\lambda)$.
   c. Quelles valeurs peut prendre $a_0(\lambda)$? Que peut-on déduire des valeurs de $a_0(\lambda)$ et $a_1(\lambda)$ pour la somme de la série $\left(\sum\ a_n(\lambda)\, x^n\right)$?

   d. Montrer que R est infini, et que la fonction y est solution de **($\mathscr{E}$)** sur $]0, +\infty[$.

   e. On suppose, dans ce qui suit, que : $a_0(\lambda) = \dfrac{1}{2^{\lambda}\ \Gamma(\lambda+1)}$.

   Montrer que, pour tout entier p : $a_{2p}(\lambda) = \dfrac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\ p!\ \Gamma(\lambda+p+1)}$.

   f. On pose, pour tout réel strictement positif x : $J_{\lambda}(x) = x^{\lambda} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^n$.

   Montrer que $J_{-\lambda}$ est aussi solution de **($\mathscr{E}$)** sur $]0, +\infty[$.

   g. Montrer que :

$$J_{\lambda}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\ \Gamma(\lambda+n+1)} .$$

h. On suppose que $(J_{-\lambda} , J_{\lambda})$ est une base de l'espace des solutions de **(** $\mathcal{E}$ **)** sur $]\, 0 \,, +\infty\, [$.

Donner la forme générale des solutions de **(** $\mathcal{E}$ **)** sur $]\, 0 \,, +\infty\, [$.

2. Soit y une solution non identiquement nulle de l'équation de Bessel **(** $\mathcal{E}$ **)** sur $]\, 0 \,, +\infty\, [$, pour une valeur de λ fixée. On considère la fonction u définie pour tout réel strictement positif x par :

$$u(x) = x^{1/2}\, y(x) .$$

a. Déterminer un nombre σ tel que, pour $x > 0$:

$$u''(x) + \left(1 + \frac{\sigma}{x^2} \right) u(x) = 0$$

b. On suppose que $\lambda = ½$. Déterminer y et tracer son graphe.

L'équation de Bessel régit en particulier les vibrations des membranes circulaires, comme celles d'instruments musicaux tels que le tambour, ou la grosse caisse.