UL 411

SESSION 2004

Filière MP

MATHÉMATIQUES

Epreuve commune aux ENS de Paris et Lyon

Durée : 6 heures

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

Tournez la page S.V.P.

AVERTISSEMENT

La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies. Pour traiter une question, le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes.

Les parties I, II, et III sont indépendantes.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Dans tout le problème, on désigne par p, q, n des entiers naturels non nuls. On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Pour tout sous-corps K de $\mathbb{C}$, on appelle $M_{p,q}(K)$ (respectivement $M_n(K)$) l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes (respectivement des matrices carrées $n \times n$) à coefficients dans K. On identifie K^n au K-espace vectoriel $M_{n,1}(K)$ des matrices colonnes, ce qui permet de parler de Mx pour $M \in M_n(K)$ et $x \in K^n$.

On note $\mathrm{GL}_n(K)$ le sous-ensemble de $M_n(K)$ constitué des matrices inversibles. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(K)$, muni du produit matriciel, est un groupe (non commutatif si $n \geq 2$) dont l'élément neutre est la matrice identité I_n. On note $\mathrm{SL}_n(K)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé des matrices de déterminant 1. On identifie $\mathrm{GL}_1(K)$ au groupe multiplicatif K^* des éléments non nuls de K.

Si $M = (m_{ij})$ est un élément de $M_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M} = (\bar{m}_{ij})$ sa matrice conjuguée. On dit qu'une partie E de $M_{p,q}(\mathbb{C})$ est *stable par conjugaison complexe* si pour toute matrice M de E, la matrice conjuguée $\overline{M}$ est également dans E. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. On munit $M_n(\mathbb{C})$ de sa topologie usuelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie, et A (respectivement B) une partie de X (respectivement Y). On rappelle qu'une application $\varphi : A \to B$ est un *homéomorphisme* si φ est une application continue, bijective, dont l'application réciproque est continue.

Sauf mention contraire, les lois de groupe seront notées multiplicativement (le produit de deux éléments a et b étant noté $a.b$ ou simplement ab); on désignera par e_G (ou simplement e si cela ne prête pas à confusion) l'élément neutre d'un groupe G.

Si E est un ensemble et K un sous-corps de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{F}(E, K)$ le K-espace vectoriel des applications de E dans K.

Enfin, on rappelle le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration :

Soit E une famille d'endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, telle que $u \circ v = v \circ u$ pour tous u, v de E. Alors il existe une base de diagonalisation commune à tous les éléments de E.

Partie I : Actions de groupes

Pour tout groupe G, on note $\mathrm{Aut}\, G$ l'ensemble des *automorphismes* de G, c'est-à-dire des morphismes de groupe bijectifs de G dans lui-même.

I.1. Montrer que $\mathrm{Aut}\, G$ est un groupe pour la composition $\circ$ des applications.

Une *action* d'un groupe Γ sur un groupe G est un morphisme de groupes $\Phi : \Gamma \to (\mathrm{Aut}\, G, \circ)$. On attire en particulier l'attention des candidats sur le fait que dans cette définition, on impose que pour tout élément γ de Γ, son image $\Phi(\gamma)$ soit un automorphisme du groupe G, et pas seulement une bijection de G sur G.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $g \in G$, on notera ${}^{\gamma}g$ l'élément $[\Phi(\gamma)](g)$ de G (l'action Φ étant sous-entendue). On note G^{Γ} l'ensemble des éléments g de G qui vérifient l'égalité ${}^{\gamma}g = g$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

I.2. Soit Φ une action d'un groupe Γ sur un groupe G. Soient $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des éléments de Γ et g, g_1, g_2 des éléments de G.

Comparer ${}^{\gamma}(g_1 g_2)$ et ${}^{\gamma}g_1 . {}^{\gamma}g_2$; même question pour ${}^{(\gamma_1\gamma_2)}g$ et ${}^{\gamma_1}({}^{\gamma_2}g)$. Déterminer ${}^{e}g$ (où $e = e_\Gamma$) et ${}^{\gamma}e$ (où $e = e_G$). A-t-on ${}^{\gamma}(g^{-1}) = ({}^{\gamma}g)^{-1}$?

I.3. Soient Γ_2 le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est stable par conjugaison complexe. Montrer que l'application $\Phi : \Gamma_2 \to \mathrm{Aut}\, G$ définie par $[\Phi(1)](M) = M$ et $[\Phi(-1)](M) = \overline{M}$ (pour tout $M \in G$) est une action de Γ_2 sur le groupe G. On l'appellera *action par conjugaison complexe*. Déterminer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\Gamma_2}$ pour cette action.

I.4. On suppose fixées des actions d'un groupe Γ sur des groupes G et H. On dit alors qu'une application $u : G \to H$ est un Γ-*morphisme* si u est un morphisme de groupes qui satisfait de plus à la condition : $u({}^{\gamma}g) = {}^{\gamma}(u(g))$ pour tous $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$.

a) Soit $u : G \to H$ un Γ-morphisme. Montrer que $u(G^{\Gamma}) \subset H^{\Gamma}$.

b) On suppose de plus u surjectif. A-t-on nécessairement $u(G^{\Gamma}) = H^{\Gamma}$?

Partie II : Sous-groupes matriciels

II.1. Soit G un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que tout élément M de G vérifie $M^2 = I_n$. Montrer que G est fini, et majorer son cardinal en fonction de n.

II.2. Soient A une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et U un ouvert de A avec $I_n \in U$, tels que pour tout $(M, N) \in U \times U$, on ait $MN \in A$. On suppose qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : A \to V$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et on pose $V_1 = \varphi(U)$. On fait enfin l'hypothèse que l'application

$f : V_1 \times V_1 \to V$

$(x, y) \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(x).\varphi^{-1}(y))$ est de classe C^1.

Montrer que l'image de l'application de U dans A, qui à M associe M^2, est un voisinage de I_n dans A.

II.3. On dira qu'un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifie la *condition (L)* s'il existe des parties A et U de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant aux hypothèses de II.2., avec en outre A partie ouverte de G.

a) Montrer que le groupe $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ vérifie la condition (L) (on pourra par exemple utiliser le développement du déterminant par rapport à une colonne).

b) On suppose que G est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie (L). Montrer que l'image J de l'application de G dans G, qui à M associe M^2, est un ouvert de G. En considérant les ensembles de la forme $\{M_0.X, X \in J\}$ pour $M_0 \in G$, montrer que J est également un fermé de G.

Partie III : Construction de matrices inversibles

III.1. a) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\lambda I_n + \bar{\lambda} A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M\overline{M} = I_n$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = B\overline{B}^{-1}$.

Dans toute la suite de cette partie III, on désigne par K et L deux sous-corps de $\mathbb{C}$ avec $K \subset L$. On suppose que le K-espace vectoriel L est de dimension finie et on note Γ l'ensemble des isomorphismes de corps γ de L dans L qui satisfont en outre l'égalité $\gamma(x) = x$ pour tout x de K.

III.2. a) Montrer que si $K = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$, alors Γ est constitué de l'identité et de la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$.

b) On revient au cas général et on prend $x \in L$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(x) = 0$. Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma$, le nombre complexe $\gamma(x)$ est également racine de P.

c) En déduire que Γ est fini.

On vérifie facilement (et on admettra dans la suite) que Γ est un groupe pour la composition des applications, dont on notera désormais la loi multiplicativement.

III.3. Soient $\rho_1, ..., \rho_r$ des morphismes de groupes deux à deux distincts du groupe multiplicatif L^* dans lui-même. Montrer que la famille $(\rho_1, ..., \rho_r)$ est libre dans le L-espace vectoriel $\mathcal{F}(L^*, L)$ (on pourra procéder par récurrence sur r).

III.4. Soit f une application de Γ dans $\mathrm{GL}_n(L)$. Pour toute matrice $M = (m_{ij})$ de $M_{p,q}(L)$, on pose $\gamma(M) = (\gamma(m_{ij}))$ pour tout γ de Γ. Si M est une matrice de $M_n(L)$, on appelle $B(M)$ la matrice $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma(M)$ de $M_n(L)$. De même, pour tout vecteur x de L^n, on pose $b(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma(x)$ (c'est un vecteur de L^n).

a) Soit θ une forme linéaire sur le L-espace vectoriel L^n telle que $\theta(b(x)) = 0$ pour tout $x \in L^n$. Montrer que θ est nulle (on pourra considérer $\theta(b(hx))$ pour h dans L^* et utiliser III.3.).

b) En déduire que la famille $(b(x))_{x \in L^n}$ engendre le L-espace vectoriel L^n. On en extrait une base $(b(x_1), ..., b(x_n))$.

c) Soit M la matrice de $M_n(L)$ dont le i-ème vecteur colonne est x_i. Montrer que la matrice $B(M)$ est inversible.

Partie IV : Cocycles

Soit Φ une action d'un groupe Γ sur un groupe G (voir la partie I). On appelle *cocycle* une application $f : \Gamma \to G$ qui vérifie :

$$f(\gamma_1\gamma_2) = f(\gamma_1).({}^{\gamma_1}f(\gamma_2))$$

pour tous γ_1, γ_2 de Γ. On note $Z(\Gamma, G)$ l'ensemble des cocycles.

IV.1. On définit une relation $\sim$ sur $Z(\Gamma, G)$ par : $f \sim f'$ si et seulement s'il existe $b \in G$ tel que $f(\gamma) = b^{-1}.f'(\gamma).{}^{\gamma}b$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

On notera $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation et $[f]$ la classe d'un élément f de $Z(\Gamma, G)$. On note également 0 la classe du cocycle (dit trivial) qui envoie tout γ de Γ sur e_G.

IV.2. On prend $\Gamma = \Gamma_2 = \{1, -1\}$ et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ muni de l'action de Γ par conjugaison complexe (définie en I.3.). Montrer que $\mathcal{H}(\Gamma_2, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \{0\}$.

IV.3. Soient K et L deux sous-corps de $\mathbb{C}$ avec $K \subset L$ et L de dimension finie sur K. On prend pour Γ le groupe défini en III.1.

On définit une action de Γ sur le groupe $\mathrm{GL}_n(L)$ par : ${}^{\gamma}M = (\gamma(m_{ij}))$ pour toute matrice $M = (m_{ij})$ de $\mathrm{GL}_n(L)$.

a) Montrer que $\mathcal{H}(\Gamma, \mathrm{GL}_n(L)) = \{0\}$ (On pourra utiliser III.4. c)).

b) Que devient le résultat précédent pour $K = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$?

IV.4. On suppose fixées des actions d'un groupe Γ sur des groupes G et H. Soit $u : G \to H$ un Γ-morphisme (voir I.4.). A toute application $f : \Gamma \to G$, on associe l'application ${}^{u}f : \Gamma \to H$ définie par : $({}^{u}f)(\gamma) = u(f(\gamma))$ pour tout γ de Γ.

a) Montrer que si $f \in Z(\Gamma, G)$, alors ${}^{u}f \in Z(\Gamma, H)$.

b) Montrer que si $f \sim f'$ dans $Z(\Gamma, G)$, alors ${}^{u}f \sim {}^{u}f'$ dans $Z(\Gamma, H)$.

Avec les notations de IV.1., on a donc une unique application $\tilde{u} : \mathcal{H}(\Gamma, G) \to \mathcal{H}(\Gamma, H)$ qui vérifie : $\tilde{u}([f]) = [{}^{u}f]$ pour tout $f \in Z(\Gamma, G)$. On appelle *noyau* de $\tilde{u}$, et on note $\ker \tilde{u}$, l'ensemble des éléments c de $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ tels que $\tilde{u}(c) = 0$.

IV.5. On suppose jusqu'à la fin de cette partie que B et C sont deux groupes munis chacun d'une action de Γ, et on fixe un Γ-morphisme surjectif $u : B \to C$. On note A le noyau de u, qui est un sous-groupe de B, et $i : A \to B$ l'injection canonique.

a) Vérifier que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $a \in A$, on a ${}^{\gamma}a \in A$. On a donc une action de Γ sur le groupe A par restriction de l'action de Γ sur B, qui fait de i un Γ-morphisme.

b) Montrer que l'image de $\tilde{i} : \mathcal{H}(\Gamma, A) \to \mathcal{H}(\Gamma, B)$ est le noyau de $\tilde{u} : \mathcal{H}(\Gamma, B) \to \mathcal{H}(\Gamma, C)$.

c) On suppose de plus que $u(B^{\Gamma}) = C^{\Gamma}$. Montrer que le noyau de $\tilde{i}$ est réduit à $\{0\}$.

Partie V : Exemples d'ensembles $\mathcal{H}(\Gamma, G)$

V.1. Soit G un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, stable par conjugaison complexe, muni de l'action de $\Gamma_2 = \{-1, 1\}$ définie en I.3. On fait également l'hypothèse que G est connexe par arcs et vérifie la condition (L) définie en II.3.

a) Montrer que le Γ_2-morphisme u, qui à toute matrice M de G associe M^2, est surjectif.

b) Montrer que l'application $\tilde{u} : \mathcal{H}(\Gamma_2, G) \to \mathcal{H}(\Gamma_2, G)$ est constante égale à 0 (on pourra raisonner directement sur les cocycles).

c) En déduire que $\mathcal{H}(\Gamma_2, G)$ est fini.

V.2. Soit $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices M de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient en outre ${}^{t}MM = I_2$. On munit $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ de l'action de Γ_2 par conjugaison complexe.

a) Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ est commutatif. Vérifie-t-il la condition (L) ?

b) Déterminer le sous-groupe A de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ constitué des éléments M tels que $M^2 = I_2$. Calculer le cardinal de $\mathcal{H}(\Gamma_2, A)$.

c) Montrer que l'application $\tilde{i} : \mathcal{H}(\Gamma_2, A) \to \mathcal{H}(\Gamma_2, \mathrm{SO}_2(\mathbb{C}))$ induite par l'injection canonique $i : A \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{C})$ n'est pas constante égale à 0. En déduire le cardinal de $\mathcal{H}(\Gamma_2, \mathrm{SO}_2(\mathbb{C}))$.

V.3. On prend pour G et pour Γ le groupe additif $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et pour H le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$. On munit G (respectivement H) de l'action de Γ définie par ${}^{\gamma}x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout x de G (respectivement de H). On note σ le cycle $(1, 2, 3)$ de $\mathcal{S}_3$.

a) Soit $i : G \to H$ l'application qui associe à la classe de l'entier n la permutation σ^n. Montrer que i est un Γ-morphisme et que le noyau de $\tilde{i} : \mathcal{H}(\Gamma, G) \to \mathcal{H}(\Gamma, H)$ est réduit à $\{0\}$.

b) Montrer que $\tilde{i}$ n'est pas injective.

FIN