Mines PC 04 – Maths 2 –

Partie I –

1 Soit $f(x) = x^{a-1}(x-1)^k$; f est définie et continue (donc continue par morceaux) sur]0, 1], telle que $|f(x)| \sim_0 x^{a-1}$; or $x \to x^{a-1}$ est continue, positive sur]0, 1], et intégrable car 1-a < 1 (règle de Riemann) . On peut appliquer la règle des équivalents : f est intégrable sur]0, 1].
Pour calculer $I_{a,k}$, on effectue une intégration par parties, mais sur le segment [b, 1], 0 < b < 1 en posant $u(x) = (x-1)^k$, $v'(x) = x^{a-1}$, soit $u'(x) = k(x-1)^{k-1}$ (ce qui nécessite $k \geq 1$) et $v(x) = x^a/a$ (par exemple). On obtient : $\int_b^1 x^{a-1}(x-1)^k dx = \left[\frac{x^a}{a}(x-1)^k\right]_b^1 - \frac{k}{a}\int_b^1 x^a(x-1)^{k-1}dx$; la fonction $x \to x^a(x-1)^{k-1}$ est intégrable sur [0, 1] car elle est continue sur le segment. La 2° intégrale admet donc une limite lorsque b tend vers 0, ce qui donne : $I_{a,k} = -\frac{k}{a} I_{a+1,\,k-1}$ si k > 0 et $I_{a,0} = 1/a$. On applique de nouveau la formule à $I_{a+1,k-1}$ (possible car a+1 > 0, et tant que $k-1 \geq 0$), ce qui donne :
$$I_{a,k} = \frac{-k(-k+1)...(-1)}{a(a+1)...(a+k-1)} I_{a+k,0} = \frac{(-1)^k k!}{a(a+1)...(a+k)}$$

2 Dans le cas particulier a = k = n (a > 0) : $\int_0^1 u_n(x)dx = I_{n+1,n} = \frac{(-1)^n n!}{n(n+1)...(2n)}$; on multiplie par n ! au numérateur et au dénominateur : $I_{n,n} = \frac{(-1)^n (n!)^2}{n(2n)!} = \boxed{(-1)^n \frac{1}{nC_{2n}^n}}$

3 Le polynôme u_n est de degré 2n, donc $d°(P_n) = 2n- n = n$.
De plus : $u_n(x) = x^{2n} + Q(x)$: $d°(Q) < 2n$, ce qui entraîne, en dérivant n fois :
$u_n^{(n)}(x) = 2n(2n-1)\ldots(n+1)\, x^n + Q^{(n)}(x)$: le coefficient dominant de P_n est
$$d_n = \frac{2n(2n-1)...(n+1)}{n!} = C_{2n}^n$$

4 <u>1° méthode</u> : $u_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} x^{n+k}$; on dérive n fois : $u_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k$ soit
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} \underbrace{\frac{(n+k)!}{k!n!}}_{=C_{n+k}^n} x^k$$
<u>2° méthode :</u> on utilise la formule de Leibnitz, ce qui est possible puisque les fonctions sont polynômiales, donc n fois dérivables :
$$u_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(x^n\right)^{(k)} \left((x-1)^n\right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!}(x-1)^k$$
Ainsi $P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{1}{k!}(x-1)^k$ ou encore $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 x^{n-k}(-1)^{n-k}(x-1)^k$

5 Sachant que le polynôme P_n est de degré n, on peut alors obtenir son coefficient dominant avec la 2° expression ; le monôme de degré n de $x^{n-k}(x-1)^k$ est x^n. Ainsi : $d_n = \boxed{\sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n}$ Remarque : vous pouvez aussi démontrer cette égalité de manière combinatoire en déterminant les différentes manières de choisir un ensemble de n éléments dans un ensemble de 2n éléments (partitionné en deux ensembles de cardinal n chacun).

Partie II –

6 La fonction $t \to f(t) = t^{a-1}/(1+t^b)$ est définie sur]0, 1], continue, positive, telle que $f(t) =_0 O(1/t^{1-a})$; or la fonction $t \to 1/t^{1-a}$ est continue sur]0, 1], positive et intégrable sur]0, 1] car 1-a < 1 (règle de Riemann). On peut alors appliquer la règle de domination : f est intégrable sur]0, 1] et J(a, b) existe.

7 Remarque préliminaire : $\forall\, t \in [0, 1[\quad \dfrac{1}{1+t^b} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{kb}$ donc $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{kb+a-1}$ sur [0, 1[; on pose $f_k(t) = (-1)^k\, t^{kb+a-1}$. La question consiste en fait à permuter série et intégrale.

On peut déjà remarquer que f_k est intégrable sur]0, 1[car 1-a –kb < 1

Problème : la série de terme général $u_n = \int_0^1 |f_k(t)|dt = \int_0^1 t^{a-1+kb}dt = \dfrac{1}{a+kb}$ n'est pas convergente (une primitive de $t \to t^{a-1+kb}$ est $t \to t^{a+kb}/(a+kb)$, de limite 0 en 0) . On ne peut donc pas utiliser le théorème habituel. Que faire ? un calcul direct. Soit n > 0 ; $\forall\, t \in [0, 1[\quad \dfrac{1-\left(-t^b\right)^{n+1}}{1+t^b} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{kb}$

soit $f(t) = \dfrac{\left(-t^b\right)^{n+1}}{1+t^b} t^{a-1} + \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$; comme f et les fonctions f_k sont intégrables sur]0, 1[, la fonction

$t \to \dfrac{\left(-t^b\right)^{n+1}}{1+t^b} t^{a-1}$ l'est également ; d'où $J(a,b) = (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^1 \dfrac{t^{b(n+1)+a-1}}{1+t^b}dt}_{=I_n} + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{a+kb}$

$\forall\, t \in\ ]0, 1[\ 0 \le t^{b(n+1)+a-1}/(1+t^b) \le t^{b(n+1)+a-1}$ et la fonction $t \to t^{b(n+1)+a-1}$ est continue sur [0, 1] (n > 0) donc intégrable. On en déduit : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{b(n+1)+a}$. On applique alors le théorème d'encadrement :

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, ce qui permet d'écrire que ($\Sigma(-1)^k/(a+kb)$) converge et $\boxed{J(a,b) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{a+kb}}$

8 En particulier pour a = 1 et b = 3 : $S = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^3}$. Il reste à calculer cette intégrale. Méthode : décomposer la fraction en éléments simples.

a La partie entière de la fraction est nulle (car le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur) ; de plus $1 + t^3$ a pour racine évidente -1; en effectuant la division euclidienne de $1+t^3$ par 1+t : $1 + t^3 = (1+t)(t^2 - t + 1)$, $t^2 - t + 1$ n'a pas de racines réelles ($\Delta = -3 < 0$); ainsi $\dfrac{1}{t^3+1} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$; on multiplie par t+1 et on calcule la valeur en –1 : a = 1/3 ; pour trouver b et c, on peut multiplier par $t^2 - t + 1$ et calculer la valeur en une racine (complexe) de $t^2 - t + 1$; autre possibilité : on multiplie par t et on calcule la limite en +∞ : 0 = a + b : b = -1/3 ; enfin on calcule la valeur en 0 : 1 = a + c : c = 2/3. Conclusion : $\dfrac{3}{t^3+1} = \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{-t+2}{t^2-t+1}$

b On cherche ensuite une primitive, le problème se situant dans la 2° fraction. Pour cela, on écrit le numérateur de $\dfrac{-t+2}{t^2-t+1}$ comme combinaison linéaire de u et u', avec $u = t^2 - t + 1$, u' = 2t – 1.

Ainsi : $-t + 2 = \dfrac{-1}{2}(2t-1) + \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{-t+2}{t^2-t+1} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{u}$; or $u = (t-1/2)^2 + ¾$ et

$\int \dfrac{dt}{t^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{t}{a}\right)$. Conséquence :

$\int \frac{-t+2}{t^2-t+1}dt = -\frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arc}\tan\left((2t-1)\sqrt{3}\right)$ (ici, a^2 = ¾) et

$I = \frac{1}{3}\left[\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arc}\tan\left((2t-1)\sqrt{3}\right)\right]_0^1$; or Arctan(1/√3) = π/6 ce qui donne :

$\boxed{I = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$

9 ∀ x ∈]-1, 1[1-a < 1 – ax < 1 + ax, donc la fonction φ_a est définie, continue (donc continue par morceaux) et positive sur]-1, 1[;

a au voisinage de –1 : $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1-a)\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$ et $\varphi_a(x) =_{-1} O\left(\frac{1}{(1+x)^{1/2}}\right)$ (car $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ et $1 - x \sim_{-1} 2$) ; or la fonction $x \to (1+x)^{-1/2}$ est définie, positive sur]-1, 0], et y est intégrable car ½ < 1 (règle de Riemann) ; on peut alors appliquer la règle de domination : φ_a est intégrable sur]-1, 0].

b De même, au voisinage de 1, $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1+a)\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ et $\varphi_a(x) =_{1} O\left(\frac{1}{(1-x)^{1/2}}\right)$; or $x \to (1-x)^{-1/2}$ est définie, positive sur [0, 1[et y est intégrable car ½ < 1 (règle de Riemann) ; on peut alors appliquer la règle de domination : φ_a est intégrable sur [0, 1[.

Conclusion : φ_a est intégrable sur]-1, 1[.

10 De nouveau, il s'agit d'effectuer une permutation série-intégrale, avec les mêmes problèmes que précédemment. Puisque $|a| < 1$: ∀x ∈]-1, 1[$ax \neq 1$ et $\frac{1-(ax)^{n+1}}{1-ax} = \sum_{k=0}^{n}(ax)^k$, ce qui entraîne :

$\varphi_a(x) = \sum_{k=0}^{n} a^k \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} + a^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1-ax)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

∀ k ∈ ℕ $x \to \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur]-1, 1[car elle est y définie, continue, et vérifie, comme φ_a :

dominée par $x \to \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ au voisinage de 1 et dominée par $x \to \frac{1}{(1+x)^{1/2}}$ au voisinage de –1. On en déduit alors que la dernière fonction de l'égalité : $x \to \frac{x^{n+1}}{(1-ax)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est également intégrable sur]-1, 1[. Ce qui donne : $K(a) = \sum_{k=0}^{n} a^k \int_{-1}^{1}\frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}dx + a^{n+1}\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{x^{n+1}}{(1-ax)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}_{=I_n}$ Or :

a Si k est impair, la fonction $x \to \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur]-1 , 1[, et impaire ; son intégrale est nulle. Dans la somme précédente, il ne reste plus que les termes d'indices k pair.

b ∀ x ∈]-1, 1[1-a < 1-ax < 1+a et $|x^n| \leq 1$, ce qui entraîne (car $x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur]-1, 1[; c'est un cas particulier du cas général vu précédemment) $|I_n| \leq \frac{1}{1-a}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Puisque $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est une constante (sa valeur est d'ailleurs $\left[\mathrm{Arc}\sin(x)\right]_{-1}^{1} = \pi$) : la suite (I_n) est bornée.

Puisque $|a| < 1$, la suite $(a^{n+1}I_n)$ a pour limite 0 ; la série de terme général $a^k \int_{-1}^{1} \frac{x^k dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge et

$K(a) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} a^k \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et finalement : $\boxed{K(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} \int_{-1}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx}$

11 On utilise le résultat suivant du cours : pour tout réel b et $x \in]-1, 1[$:

$(1-x)^b = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(b-1)...(b-n+1)}{n!} x^n$. Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

On l'applique pour $b = -1/2$ et $x^2 \in]-1, 1[$, ie $x \in]-1 ; 1[$ (le rayon de convergence reste 1) :

$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} (x^2)^n$; on multiplie numérateur et dénominateur par le produit des termes pairs de 2 à 2n :

$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.2....(2n)}{2^n\,(2.4...(2n))\,n!} (x^2)^n$ Dans les termes pairs du dénominateur on factorise par 2 : $\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ Et

$\forall a \in]-1, 1[\quad K(a) = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi a^{2n}$

12 Si les sommes de deux séries entières sont égales sur un intervalle]-a, a[, avec a > 0, alors leurs coefficients sont égaux. Comme la question 10 a donné un développement en série entière de la fonction K : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \pi$

Partie III -

13 On reprend le calcul de la question 11 (en laissant x) $\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$ et le rayon de convergence de la série est égal à 1. Au vu de l'expression : $a_n = 2^{-2n}$.

14 La fonction g est définie et de classe C^∞ sur]-1, 1[;

$\forall x \in]-1, 1[$ g'(x) = $\frac{1}{1-x^2} + \arcsin(x).(-2x).\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2}$ (dérivée d'un produit) soit :

$\forall x \in]-1, 1[$ g'(x) = $\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} g(x)$. La fonction g est donc solution sur]-1, 1[de l'équation différentielle : $\boxed{(1-x^2)\, y' = 1+xy}$

15 La fonction g est produit de deux fonctions développables en série entière sur]-1, 1[, donc est développable en série entière sur]-1, 1[(au moins). Soit g(x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ce développement en série entière. Puisque $R \geq 1$, la fonction g est de classe C^∞ sur]-1, 1[(déjà connu), les séries dérivées successives ont pour rayon 1 (au moins) et $\forall x \in]-1, 1[$ g'(x) = $\sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$. On reporte dans l'équation différentielle : $\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1}$ Dans la 1° somme, on prend pour nouvel indice n' tel que n'+1 = n-1, ce qui donne :

$\forall$ x $\in$]-1, 1[$\displaystyle\sum_{n=-1}^{+\infty}(n+2)b_{n+2}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}nb_nx^{n+1}=1+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^{n+1}$

Si les sommes de deux séries sont égales sur un intervalle]-d, d[, d > 0, alors elles sont égales ; en particulier leurs coefficients sont égaux , ce qui donne :

a Coefficient constant : $b_1 = 1$

b Coefficient de x : $2b_2 = 0$

c Coefficient de x^{n+1}, $n \geq 1$: $(n+2)b_{n+2} - nb_n = b_n$ ou encore : $b_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}b_n$.

Puisque $a_2 = 0$, on montre par une récurrence immédiate : $\forall$ p $\geq$ 1 $b_{2p} = 0$. Pour les coefficients d'indice impair : $b_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1}b_{2p-1}$ qu'on remplace par sa valeur en fonction de b_{2p-3} et ainsi de suite : $b_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1}\dfrac{2p-2}{2p-1}...\dfrac{2}{3}b_1$; on multiplie numérateur et dénominateur par les entiers pairs de 2 à 2p, et on factorise ensuite 2 dans chaque terme pair du numérateur : $b_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}1$. Le seul terme inconnu est $b_0 = g(0) = 0$. Conclusion : $\forall$ x $\in$]-1, 1[$g(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$; on pose alors p = n-1, ce qui donne : $\forall$ x $\in$]-1, 1[$g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{4n^2(2n-1)!}x^{2n-1}$ soit $\boxed{g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{nC_{2n}^n}x^{2n-1}}$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

♠ si x = 0, la série converge.

♠ si $x \neq 0$ alors $\forall$ p $\geq$ 0 $b_{2p+1}x^{2p+1} = u_p \neq 0$ et $|u_{p+1}/u_p| = \dfrac{2p}{2p+1}x^2 \underset{p\to+\infty}{\to} x^2$. On peut appliquer le critère de d'Alembert.

♣ si $|x| < 1$, la série converge absolument.

♣ si $|x| > 1$, la série diverge grossièrement.

Conclusion : R = 1.

16 Ce qui a déjà été fait à la question 15.

17 Pour $x = 1/\sqrt{2} \in$]-1, 1[$g(1/\sqrt{2}) = \Sigma = \sqrt{2}\left(1+\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}+\dfrac{2.4}{3.5}.\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2.4.6}{3.5.7}.\dfrac{1}{2^3}+...\right)$ (on met 1/x en facteur), soit G = $\dfrac{\pi/4}{\sqrt{1/2}}\sqrt{2}$ et $\boxed{\Sigma=\dfrac{\pi}{2}}$

18 On compare h(x) avec g'(x) calculé à la question 14 :

$\forall$ x $\in$]-1, 1[$h(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}+\left(g'(x)-\dfrac{1}{1-x^2}\right)=g'(x)-1$

Puisque g est la somme d'une série entière de rayon R = 1, (cf question 15)

$\forall$ x $\in$]-1, 1[$g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{4n^2(2n-1)!}(2n-1)x^{2n-2}$; pour n = 1, le terme est 1, ce qui donne :

$h(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{4n^2(2n-1)!}(2n-1)x^{2n-2}$. On effectue alors le changement de variable n' = n-1, ce qui donne : $\forall$ x $\in$]-1, 1[$h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}{4(n+1)^2(2n+1)(2n)!}(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$ Et $\boxed{\beta_n = 2^{2n}}$.

19 Pour $x = ½ \in]-1, 1[$ $h(1/2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{\pi/6}{(3/4)^{3/2}}$ soit $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{1}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}}$ et

$g(1/2) = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nC_{2n}^n} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$

Partie IV -

20 On utilise directement le résultat du cours :

$\forall\, t \in]-1\,,\,1[$ $(1+t)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n t^n$ avec $d_0 = 1$ et $d_n = \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)...(-\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \geq 1$ (R = 1)

donc $\forall\, t \in]-1\,,\,1[$ $f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\alpha)t^n$, avec $c_0 = 1$ et $c_n(\alpha) = d_n(-1)^n = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{n!}$, $n \geq 1$ (R = 1). Puisque $\alpha > 0$, $c_n(\alpha) > 0$.

21 La fonction $t \to \frac{F(t)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur [0, 1[, dominée au voisinage de 1 par $t \to \frac{1}{(1-t)^\alpha}$ (car F est continue en 1, donc bornée au voisinage de 1) ; comme $t \to \frac{1}{(1-t)^\alpha}$ est intégrable sur [0, 1[car $\alpha< 1$ (règle de Riemann), on peut appliquer la règle de domination : la fonction $t \to \frac{F(t)}{(1-t)^\alpha}$ est intégrable sur [0, 1[et l'intégrale I_α existe.

22 On utilise le développement en série entière de la question 20 : $\forall\, t \in [0\,,\,1[$ $f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\alpha)t^n$, et $\forall\, t \in [0\,,\,1[$ $\frac{F(t)}{(1-t)^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\alpha)F(t)t^k$ L'idéal serait de pouvoir permuter série et intégrale. Pour le théorème le plus général, il faudrait montrer la convergence de la série $(\sum c_k(\alpha)\int_0^1 F(t)t^k dt)$, ce qui paraît délicat (dans la pratique, à cause du terme $c_k\alpha$), dont il est difficile d'obtenir un équivalent. On pense alors à la remarque de l'énoncé dans la question 20 : les coefficients $c_k(\alpha)$ sont positifs. L'idée est d'utiliser le théorème de permutation pour une série de fonctions positives. Mais F est-elle positive sur [0, 1] ? pas toujours ! Que faire ? Vous rappeler vos souvenirs de 1° année : si F est une fonction à valeurs réelles, $F(t) = F^+(t) - F^-(t)$, avec $F^+(t) = \max(0, f(t)) \geq 0$ et $F^-(t) = \max(0, -f(t)) \geq 0$. Lorsque F est continue sur [0, 1], F^+ et F^- le sont également. Conclusion : il suffit de montrer le résultat pour une fonction F à valeurs positives, ce qu'on suppose dorénavant.

On pose ainsi : $u_k(t) = c_k(\alpha)\, F(t)\, t^k$. Les fonctions u_k sont :

a Continues sur [0, 1] (donc continue par morceaux), positives

b Elles sont intégrables sur le segment [0, 1] car continues.

c (Σf_k) converge simplement sur [0, 1] vers la fonction $t \to \frac{F(t)}{(1-t)^\alpha}$, continue sur [0, 1[

On utilise alors le théorème de permutation série-intégrale pour les séries à termes positifs : la série $(\sum c_k(\alpha)\int_0^1 F(t)t^k dt)$ converge si et seulement si la fonction $t \to \frac{F(t)}{(1-t)^\alpha}$ est intégrable sur [0, 1[, ce qui est le cas, et dans ce cas : $\int_0^1 \frac{F(t)}{(1-t)^\alpha}dt = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\alpha)\int_0^1 F(t)t^k dt$, ce qui est bien le résultat demandé.

23 On suit les indications de l'énoncé : F est continue sur [0, 1] (car $n \geq 1$), $\alpha = ½ \in\ ]0, 1[$ donc la formule s'applique. Ici, $c_k(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}...\frac{(2n-1)}{2}\frac{1}{n!}$. Comme auparavant, on multiplie numérateur et dénominateur par les entiers pairs de 2 à 2n : $c_k(\alpha) = \frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$ et

$\int_0^1 F(t)t^k dt = \int_0^1 t^{n+k-1/2}dt = \left[\frac{t^{n+k+1/2}}{n+k+1/2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+k+1/2}$. En appliquant la formule, on obtient ainsi :

$\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\frac{1}{n+k+1/2}$ Problème : calculer cette intégrale (intégrale dite abélienne).

On travaille sur $t(1-t) = t - t^2$ qu'on essaie de mettre sous la forme $a - b(\ )^2$ (pour retrouver une expression de la forme $1 - \cos^2(u)$: $t - t^2 = -(t-1/2)^2 + ¼ = \frac{1}{4}\left[1-(2t-1)^2\right]$. Comme $t \in [0, 1[$, $2t-1 \in [-1, 1[$; on peut donc poser $2t-1 = \cos(u)$, $u \in [0, \pi]$ (et donc $u = \arccos(2t-1)$). On effectue alors le changement de variable (de classe C^1) : $t = (1+\cos(u))/2$, (possible car l'application : $u \to t$ est une bijection de classe C^1 de $]0, \pi]$ sur $[0, 1[$) ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt = \int_\pi^0 \left(\frac{\frac{1}{2^n}(1+\cos(u))^n}{\frac{1}{2}|\sin(u)|}\right)\left(-\frac{1}{2}\sin(u)\right)du$$ Or sur l'intervalle, $\sin(u) > 0$:

$$\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt = \int_0^\pi \left(\frac{(2\cos^2(u/2))^n}{2^n}\right)du$$

Remarque : j'ai posé $t - t^2 = (1 - \cos^2(u))/4$ et non $(1-\sin^2(u))/4$ car il est plus facile de transformer $1+\cos(u)$ que $1+\sin(u)$…

On effectue alors le changement de variable affine (donc de classe C^1) $t = u/2$, ce qui donne

$$I_\alpha = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)dt = J_n$$: une intégrale de Wallis !

On effectue alors une intégration par parties ($n > 0$) en posant $u(t) = \cos^{2n-1}(t)$, $v'(t) = \cos(t)$, soit $u'(t) = -(2n-1)\cos^{2n-2}(t)\sin(t)$, $v(t) = \sin(t)$ (par exemple). u et v étant de classe C^1 sur le segment :

$J_n = 2\left[\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} + 2(2n-1)\int_0^{\pi/2}\underbrace{\sin^2(t)}_{=1-\cos^2(t)}\cos^{2n-2}(t)dt$ soit $2n\, J_n = (2n-1)\, J_{n-1}$; de plus $J_0 = \pi$.

On obtient $J_n = I_\alpha = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}...\frac{1}{2}\pi = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$ (simplification déjà faite dans les questions précédentes).

En remplaçant dans l'égalité obtenue au début de la question : $\boxed{C_{2n}^n = \frac{1}{\pi}2^{2n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\frac{1}{n+k+1/2}}$

<u>2° méthode de calcul de l'intégrale :</u> on peut également écrire $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt = \int_0^1 t^{n-1}\sqrt{\frac{t}{1-t}}dt$ et poser le changement de variables $u = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$ ce qui donne : $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{u^{2n}}{(1+u^2)^{n+1}}du$ puis un 2° changement de variable $\vartheta = \mathrm{Arctan}(u)$ et $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^{2n}(\vartheta)}{(1+\tan^2(\vartheta))^{n+1}}d\vartheta = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(\vartheta)d\vartheta$