$\boxed{\text{CCP 2004 PC}}$ Maths 1

$\boxed{\text{I}}$ 1) a) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Base de $\ker M$: $(e_2 - e_1\ ,\ e_3 - e_1)$; base de $\ker\ {}^tM$: $(e_1 + e_2 - e_3\ ,\ e_4 - e_2)$; pas d'inclusion .

b) Base de $\operatorname{Im} M$: $(e_1 + e_3\ ,\ -e_1 + e_2 + e_4)$; base de $\operatorname{Im}\ {}^tM$: $(e_1 + e_2 + e_3\ ,\ e_4)$; pas d'inclusion .

2) ${}^tAA$ est carrée d'ordre p ; si le produit est possible , $\ker(A) \subset \ker(BA)$ donc $\ker(A) \subset \ker(\ {}^tAA)$.

Réciproquement : $X \in \ker(\ {}^tAA) \Leftrightarrow\ {}^tAAX = 0 \Rightarrow\ {}^tX\ {}^tAAX = 0 \Rightarrow \|AX\|^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \ker(A)$

donc on a : $\underline{\ker(A) = \ker(\ {}^tAA)}$. En remplaçant A par ${}^tA$: $\underline{\ker(\ {}^tA) = \ker(A\ {}^tA)}$.

b) Appliquons le théorème du rang : $rg(\ {}^tAA) = p - \dim(\ker(\ {}^tAA)) = p - \dim(\ker(A)) = rg(A)$.

De même : $rg(A\ {}^tA) = rg(\ {}^tA)$. Mais $rg(\ {}^tA) = rg(A)$ donc : $\underline{rg(\ {}^tAA) = rg(A\ {}^tA) = rg(A)}$

c) Si le produit est possible , $\operatorname{Im}(BA) \subset \operatorname{Im}(B)$ donc $\operatorname{Im}(\ {}^tAA) \subset \operatorname{Im}(\ {}^tA)$; d'après b) ils ont même dimension

donc $\underline{\operatorname{Im}(\ {}^tAA) \subset \operatorname{Im}(\ {}^tA)}$; de même : $\underline{\operatorname{Im}(A\ {}^tA) \subset \operatorname{Im}(A)}$.

3) Soit $c_{i,j}$ le terme de la ligne i , colonne j de ${}^tBB$: $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{k,i} b_{k,j} = < x_i, x_j >$ donc $\boxed{{}^tBB = G}$

D'après 2)c) , $rg(G) = rg(B)$ et $rg(B) = rg(S)$: rang de la famille $(x_1, ..., x_q)$.

b) G est symétrique réelle donc diagonalisable . Soit λ une valeur propre de G et X un vecteur propre associé :

$GX = \lambda X \Rightarrow\ {}^tX\ {}^tBBX = \lambda\ \ {}^tXX \Rightarrow \|BX\|^2 = \lambda \|X\|^2$; X n'est pas nul donc $\|X\|^2 \neq 0$, donc $\boxed{\lambda \geq 0}$

c) $\det(G)$ est égal au produit de ses valeurs propres , celles-ci sont toutes positives donc $\underline{\det(G) \geq 0}$

$\det(G) \neq 0 \Leftrightarrow rg(G) = q \Leftrightarrow rg(B) = q \Leftrightarrow rg(S) = q \Leftrightarrow (x_1, ..., x_q)$ est libre .

d) Cas où $q = 2$: $\det(G) = \begin{vmatrix} \|x_1\|^2 & < x_1, x_2 > \\ < x_2, x_1 > & \|x_2\|^2 \end{vmatrix} \geq 0 \Rightarrow (< x_1, x_2 >)^2 \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2$

et on a égalité ssi (x_1, x_2) est liée .

4) Posons $x'_j = x_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k x_k$. Notons $S\ ' = (x_1, ..., x'_j, ..., x_q)$. S et $S\ '$ engendrent le même SEV .

Notons $B\ '$ la matrice des composantes de $(x_1, ..., x'_j, ..., x_q)$ dans la base $(e_1, ..., e_r)$ et $G\ ' =\ {}^tB\ 'B\ '$.

On remplace la colonne $C\ '_j$ de $\det(G\ ')$ par $C\ '_j - \sum_{k \neq j} \alpha_k C\ '_k$:

$< x_i, x'_j > - \sum_{k \neq j} \alpha_k < x_i, x_k > \quad = \quad < x_i, x_j >$ (pour $i = j$ on a en premier vecteur x'_j)

On remplace la ligne L''_j du déterminant obtenu par $L''_j - \sum_{k \neq j} \alpha_k L''_k$ et on retrouve $\det(G)$.

<u>Autre méthode</u> :

1^{er} cas : S est libre . Alors $rg(S) = q \Rightarrow r = q$ donc B est carrée et donc $\det(G) = [\det(B)]^2$. Or

$\det(x_1, ..., x'_j, ..., x_q) = \det(x_1, ..., x_j, ..., x_q)$ donc $\gamma(x_1, ..., x'_j, ..., x_q) = \gamma(x_1, ..., x_j, ..., x_q)$

2^{ème} cas : S est liée . Alors S' l'est aussi donc $\gamma(x_1, ..., x'_j, ..., x_q) = \gamma(x_1, ..., x_j, ..., x_q) = 0$

5) a) $\gamma(x_1, ..., x_q) = \gamma(h_1 + p_L(x_1), ..., x_q) = \gamma(h_1, ..., x_q)$ en appliquant 4) car $p_L(x_1)$ est une combinaison

linéaire de $x_2, ..., x_q$. Or $h_1 \in L^\perp$ donc $< h_1, x_j >= 0$ pour tout $j \geq 2$. La première ligne (ou colonne) de

$\gamma(h_1, ..., x_q)$ a tous ses termes nuls sauf le premier qui vaut $< h_1, h_1 >$. Les termes des lignes ou colonnes

suivants sont $< x_i, x_j >$ avec $i \geq 2$ et $j \geq 2$. En développant ce déterminant suivant la première colonne on

obtient bien : $\boxed{\gamma(x_1, ..., x_q) = \|h_1\|^2 \ \gamma(x_2, ..., x_q)}$

b) i) h_1 est orthogonal à $p_L(x_1)$, en appliquant le théorème de Pythagore : $\|x_1\|^2 = \|h_1\|^2 + \|p_L(x_1)\|^2$ et

$\gamma(x_1) = \|x_1\|^2$ donc $\|h_1\|^2 \leq \gamma(x_1)$. $\gamma(x_2, ..., x_q) \geq 0$ donc : $\underline{\gamma(x_1, ..., x_q) \leq \gamma(x_1) \ \gamma(x_2, ..., x_q)}$.

Si S est libre alors les termes sont non nuls donc l'égalité a lieu si et seulement si $\|h_1\|^2 = \gamma(x_1)$ ssi $p_L(x_1) = 0$,

ssi $x_1 \in L^\perp$. Mais si S est liée , cette condition n'est plus nécéssaire ....

ii) En supposant <u>S libre</u> , on procède par récurrence : $\gamma(x_{q-1}, x_q) \leq \gamma(x_{q-1}) \ \gamma(x_q)$, égalité ssi $x_{q-1} \perp x_q$; etc .

6) Les vecteurs colonnes de A sont libres puisque $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Posons $G = {}^tAA$: $\det(G) = \gamma(c_1, ..., c_n)$

d'après 3) et $\det(G) = [\det(A)]^2$; d'après 5)b) : $\gamma(c_1, ..., c_n) \leq \|c_1\|^2 ... \|c_n\|^2$ d'où $|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^{n} \|c_k\|$

et l'égalité a lieu ssi $c_1, ..., c_n$ sont 2 à 2 orthogonaux .

b) $\|c_k\|^2 = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,j})^2 \leq n$ donc $\underline{\det(A) \leq (\sqrt{n})^n}$. Si l'égalité a lieu , alors les vecteurs colonnes sont 2 à 2

orthogonaux . De plus , $\|c_k\|^2 = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,j})^2 = n$ et $(a_{i,j})^2 \leq 1$ donc $\forall i, j$, $(a_{i,j})^2 = 1 \Rightarrow a_{i,j} = \pm 1$.

Réciproque : si les vecteurs colonnes sont 2 à 2 orthogonaux alors $|\det(A)| = \prod_{k=1}^{n} \|c_k\|$ et si $\forall i, j$, $a_{i,j} = \pm 1$

alors $\forall k$, $\|c_k\|^2 = n$ donc on a bien $|\det(A)| = (\sqrt{n})^n$.

$\boxed{\text{II}}$ 1) 8 Eléments de H_2 : $\pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\pm\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2)a) En notant c_j les vecteurs colonnes de A et $B = {}^tAA$, on a : $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} =< c_i, c_j >$.

c_j sont 2 à 2 orthogonaux donc si $i \neq j$, $b_{i,j} = 0$. Si $i = j$: $b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2 = n$ donc $\boxed{{}^tAA = nI_n}$

b) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tAA = 2I_2$ mais $A \notin H_2$ donc la réciproque est fausse .

c) Si on impose : $\forall i, j$, $a_{i,j} = \pm 1$; alors ${}^tAA = nI_n$ implique que $A_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}A$ est orthogonale donc les vecteurs

colonnes de A sont 2 à 2 orthogonaux , donc $\underline{A \in H_n}$

3) Posons $A' = {}^tP^{(\sigma)}A$. $\forall i, j$, $a'_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} P_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)}a_{k,j} = a_{\sigma(i),j}$. La ligne i de A' est la

ligne $\sigma(i)$ de A . ${}^tP^{(\sigma)}A$ est obtenue en faisant la permutation σ sur les lignes de A .

b) Posons $A'' = AP^{(\sigma)}$. $\forall i, j$, $a''_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}P_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$. La colonne j de A'' est la

colonne $\sigma(j)$ de A . $AP^{(\sigma)}$ est obtenue en faisant la permutation σ sur les colonnes de A .

c) A'' vérifie les mêmes propriétés que A (colonnes 2 à 2 orthogonales , éléments dans $\{-1, 1\}$) donc $A'' \in H_n$

Si $A \in H_n$ alors $\frac{1}{\sqrt{n}}A \in O_n$ donc sa transposée aussi : $\frac{1}{\sqrt{n}}\,{}^tA \in O_n \Rightarrow A\,{}^tA = nI_n$ et les éléments de ${}^tA$ sont

dans $\{-1, 1\}$ donc d'après 2)c) : ${}^tA \in H_n$. On en déduit que ${}^tAP^{(\sigma)} \in H_n$, donc ${}^t({}^tAP^{(\sigma)}) = {}^tP^{(\sigma)}A \in H_n$.

Le produit $A\Delta$ s'obtient en multipliant la colonne j de A par $d_{j,j}$ pour tout j . Or $d_{j,j} = \pm 1$ donc les termes de $A\Delta$

sont dans $\{-1, 1\}$ et pour $i \neq j$: $< c_i, c_j >= 0 \Rightarrow \ < \pm c_i, \pm c_j >= 0$ donc $A\Delta \in H_n$.

${}^tA \in H_n \Rightarrow \ {}^tA\Delta \in H_n \Rightarrow {}^t({}^tA\Delta) \in H_n \Rightarrow \Delta A \in H_n$.

4)a) Les éléments de A et ceux de B valent ± 1 , donc ceux de $A \otimes B$ aussi . Notons c_j les colonnes de B et V_j

celles de $A \otimes B$. Pour $i \neq j$: $< V_i, V_j > \ = a_{1,k}a_{1,l} < c_i, c_j > +a_{2,k}a_{2,l} < c_i, c_j >= 0$ car $< c_i, c_j >= 0$.

Donc $A \otimes B \in H_{2n}$.

b) $H_2 \neq \varnothing$, soit $A \in H_2$: on a $A_2 = A \otimes A \in H_4$ donc $A_3 = A \otimes A_2 \in H_8$ etc ... Donc $H_{2^n} \neq \varnothing$

c) $A \in H_4$ telle que $\forall i$, $a_{i,1} = 1$, $a_{1,2} = a_{2,2} = 1$, $a_{3,2} = a_{4,2} = -1$ n'est pas de la forme $A \otimes B$.

5)a) $H_n \neq \varnothing$, soit $A \in H_n$. Soit $\Delta \in D_n$ tq $\forall i$, $\delta_{i,i} = a_{i,1}$. Alors $B = \Delta A$ vérifie : $b_{i,1} = \delta_{i,i} a_{i,1} = 1$

pour tout i et $B \in H_n$. Notons c_j les colonnes de B : $< c_1, c_2 >= 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} b_{k,2} = 0$ et $b_{k,2} = \pm 1$ donc

la moitié vaut 1 et l'autre -1 , donc $\underline{n \text{ est pair}}$.

b) Soit C la matrice obtenue en effectuant une permutation des lignes de B qui amène les termes positifs dans

les m premières lignes . D'après 3) $C \in H_n$. Les p.s. des colonnes 1 et 3 ; 2 et 3 donne :

$\sum_{k=1}^{n} b_{k,3} = 0$; $\sum_{k=1}^{m} b_{k,3} - \sum_{k=m}^{n} b_{k,3} = 0$ donc $\sum_{k=1}^{m} b_{k,3} = 0$ donc m est pair et $\underline{n = 4k}$

$\boxed{\text{III}}$ 1) S est symétrique réelle donc diagonalisable et $\exists P \in O_n$ tq $D = P^{-1}SP = {}^tPSP$ soit diagonale .

$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX\, PD\, {}^tPX = {}^tYDY = d_{1,1}(y_1)^2 + d_{2,2}(y_2)^2 + \cdots + d_{n,n}(y_n)^2$

avec $Y = {}^tPX$ et $X \mapsto Y$ est bijective puisque P est inversible .

$\forall X \neq 0$, ${}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall Y \neq 0$, $d_{1,1}(y_1)^2 + d_{2,2}(y_2)^2 + \cdots + d_{n,n}(y_n)^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{\forall i \text{ , } d_{i,i} > 0}$

2)a) ${}^tMM$ est symétrique réelle et comme on l'a vu en I , ses valeurs propres sont positives . De plus

$\det({}^tMM) = [\det(M)]^2 \neq 0$ donc 0 n'est pas valeur propre de ${}^tMM$. Donc $\underline{{}^tMM \in S_n^{++}}$.

b) $\exists P \in O_n$ tq $D = {}^tP\, {}^tMMP$ soit diagonale , et $d_{i,i} > 0$. Soit Δ la matrice diagonale tq : $\forall i$, $\delta_{i,i} = \sqrt{d_{i,i}}$

On a $D = \Delta^2$ donc en posant $S = P\Delta\, {}^tP$, on trouve : $\underline{{}^tMM = S^2}$, et $\underline{S \in S_n^{++}}$ car $\forall i$, $\delta_{i,i} > 0$.

c) $\det(S) = \delta_{1,1} ... \delta_{n,n} \neq 0$ donc S est inversible . S est symétrique donc S^{-1} aussi , et :

${}^t(MS^{-1})MS^{-1} = S^{-1}\, {}^tM\, MS^{-1} = S^{-1}\, S^2 S^{-1} = I_n$ donc $\boxed{MS^{-1} \in O_n}$

d) On peut écrire , en notant $R = MS^{-1}$: $M = RS$ avec $R \in O_n$ et $S \in S_n^{++}$.

3) Σ et D ont la même trace car elles sont semblables donc $Tr(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

b) $\exists P \in O_n$ tq $D = P^{-1}\Sigma P$. $\Sigma = PDP^{-1} \Rightarrow Q\Sigma = QPDP^{-1} \Rightarrow Tr(Q\Sigma) = Tr(QPDP^{-1}) = Tr(P^{-1}QPD)$.

Posons $Q_1 = P^{-1}QP$. P et Q sont orthogonales donc Q_1 aussi et $\underline{Tr(Q\Sigma) = Tr(Q_1 D)}$

$Tr(Q_1 D) = \sum_{i=1}^{n} q_{i,i}^{(1)} \lambda_i$. Pour tout i , $\lambda_i \geq 0$ et $q_{i,i}^{(1)} \leq 1$ car Q_1 étant orthogonale : $\sum_{j=1}^{n} \left[q_{j,i}^{(1)} \right]^2 = 1$

en particulier $\left|q_{i,i}^{(1)}\right| \leq 1$ donc $q_{i,i}^{(1)} \leq 1$. On a donc $Tr(Q_1 D) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ d'où $\boxed{Tr(Q\Sigma) \leq Tr(\Sigma)}$.

c) Pour $Q = I_n$ on a égalité donc $\sup\limits_{Q \in O_n} Tr(Q\Sigma) = Tr(\Sigma)$

4)a) Il y a $\frac{1}{2}n(n+1)$ termes au-dessus de la diagonale , tous égaux à ± 1 donc $f(A) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$.

L'ensemble $\{f(A) \ , \ A \in H_n\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure .

b) Soit $B = AT$: $b_{i,i} = \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$ donc $Tr(B) = f(A)$

c) $\det(T) = 1$ donc $T \in GL_n(\mathbb{R})$. D'après 2) $\exists R \in O_n$ et $S \in S_n^{++}$ tq $T = RS$. Alors $f(A) = Tr(ARS)$.

Posons $A' = \frac{1}{\sqrt{n}}A$. On a vu en II que $A' \in O_n$ et $f(A) = Tr(\sqrt{n}A'RS) = \sqrt{n}Tr(A'RS)$.

$A'R \in O_n$ et $S \in S_n^+$ donc d'après 3) : $f(A) \leq \sqrt{n}Tr(S)$. Vrai $\forall A \in H_n$ donc $\boxed{\alpha_n \leq \sqrt{n}Tr(S)}$

d) $\forall A \in H_2$, $f(A) \in \{-3, -1, 1, 3\}$ donc $\boxed{\alpha_2 = 3}$. D'après 2) $Tr(S) = \sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}$ où d_1 et d_2 sont les

valeurs propres de ${}^tTT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $d_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$; $d_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$ d'où $Tr(S) = \sqrt{5}$

On vérifie bien que $3 < \sqrt{2}\sqrt{5}$