N54F

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

durée 4 heures

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Préliminaires

On considère la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N},\quad \alpha_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^i du.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre α_i et α_{i+2}, pour tout entier naturel i.
2. En déduire que :

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair}, \\ \dfrac{(i-1)(i-3)...1}{i(i-2)...2} & \text{si } i \text{ est pair et non nul.} \end{cases}$$

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]-1,1[$.
On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\,y' - x\,y = f(x) \qquad (\mathcal{E}_f)$$

où f désigne une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ; on rappelle qu'une solution φ de cette équation est une fonction dérivable sur I telle que : $\forall x \in I,\ (1-x^2)\,\varphi'(x) - x\,\varphi(x) = f(x)$.

partie I

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$; justifier qu'il existe une et une seule solution φ de $(\mathcal{E}_f)$, définie sur I, et telle que $\varphi(0) = y_0$? On énoncera avec précision le théorème utilisé.

2. Montrer que toutes les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

3. (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$$(1-x^2)\,y' - x\,y = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

   (b) Etant donné un réel y_0, démontrer que l'unique solution φ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ telle que $\varphi(0) = y_0$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\forall x \in I,\ \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + y_0\Big).$$

   (c) Dans le cas particulier où l'équation différentielle est :

$$(1-x^2)\,y' - x\,y = 1 \qquad (\mathcal{E}_1),$$

   déterminer les solutions sur I.

partie II

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m. On rappelle que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m+1$.
Dans la suite du problème, on assimilera un polynôme P et sa fonction polynôme $x \mapsto P(x)$.
Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé. On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \Delta(P)(x) = (1-x^2)P'(x) - xP(x).$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_m[X]$. Démontrer que $\Delta(P)$ est un polynôme dont on exprimera le degré en fonction de celui de P.

2. Démontrer que $P \mapsto \Delta(P)$ induit une application linéaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

   On note Δ_m cette application linéaire.

3. Démontrer que Δ_m est injective.

4. Déterminer le rang de Δ_m. Que peut-on en déduire pour l'espace image de Δ_m ?

5. Exprimer la matrice A_m de Δ_m relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

   On cherche dans cette partie pour quelles applications f, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ admet une solution polynomiale, c'est-à-dire une solution de la forme $x \mapsto P(x)$, où P désigne un polynôme à coefficients réels.

6. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ; montrer que si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ admet sur I une solution polynomiale $x \mapsto P(x)$, f est nécessairement une fonction polynomiale que l'on exprimera en fonction de $\Delta(P)$.

7. Soit Q un polynôme à coefficients réels et de degré n non nul. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$. On note V le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n+1}$ de coordonnées $q_0, q_1, \ldots, q_n$. On a ainsi :

$$V = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$. Soit U le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$. Démontrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_Q)$ si et seulement si on a l'égalité $A_{n-1}U = V$.

(b) En déduire que les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :

i. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_Q)$ admet une solution polynomiale,

ii. $\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, tel que $Q = \Delta_{n-1}(P)$,

iii. le système linéaire $A_{n-1}S = V$ admet une solution S dans $\mathbb{R}^n$.

(c) On suppose dans cette question que $n = 4$;

i. Ecrire précisément le système $A_3 S = V$.

ii. Montrer que ce système admet une solution si et seulement si les coefficients du polynôme Q vérifient l'egalité : $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$.

iii. En supposant cette condition satisfaite, résoudre ce système et en déduire l'expression de la solution polynomiale P de $(\mathcal{E}_Q)$, en fonction de q_0, q_1, q_3 et q_4 (q_2 étant exclu).

iv. Que représente la relation $3q_4 + 4q_2 + 8q_0 = 0$ pour l'image de Δ_3 ?

(d) On revient au cas où n est un entier naturel non nul quelconque. On introduit sur $\mathbb{R}_n[X]$une application λ_n définie par :

$$\forall R \in \mathbb{R}_n[X], \quad \lambda_n(R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\sin(u))\mathrm{d}u.$$

i. Démontrer que λ_n est une forme linéaire non nulle.

ii. Démontrer que, pour tout P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\lambda_n(\Delta_n(P)) = 0$.

iii. En déduire que l'image de Δ_n et le noyau de λ_n sont égaux.

iv. Expliciter une équation de l'image de Δ_n (on utilisera la suite $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étudiée dans les préliminaires).

(e) Déterminer en fonction de $q_0, \ldots, q_n$ une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $(\mathcal{E}_Q)$ admette une solution polynomiale.

(f) Retrouver le résultat de la question 7(c)ii.

partie III

On considère maintenant que f est définie par une série entière de rayon de convergence $R > 1$:

$$\forall x \in]-R, R[, \ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

1. (a) Montrer que les solutions de $(\mathcal{E}_f)$ sur $]-1, 1[$ sont développables en série entière, avec un rayon de convergence au moins égal à 1. (On pourra utiliser le résultat de I 3(b).)

(b) Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$ l'une de ces solutions ;

   i. Exprimer, pour $k \geqslant 1$, a_{k+1} en fonction de a_{k-1} et b_k.

   ii. En déduire , pour $k \geqslant 1$, une relation vérifiée par $\dfrac{a_{2k}}{\alpha_{2k}}$, $\dfrac{a_{2(k-1)}}{\alpha_{2(k-1)}}$ et $\dfrac{b_{2k-1}}{(2k-1)\alpha_{2(k-1)}}$ (on utilisera la question 1. des préliminaires).

   iii. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p} sous forme de sommes dépendant de a_0, des α_{2k} et des b_{2k-1}, avec $1 \leqslant k \leqslant p$.

   iv. De même, déduire de la question (i) ci-dessus, pour $k \geqslant 1$, une relation vérifiée par $(2k+1)a_{2k+1}\alpha_{2k}$, $(2k-1)a_{2k-1}\alpha_{2(k-1)}$ et $b_{2k}\alpha_{2k}$.

   v. En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, a_{2p+1} sous forme de sommes dépendant des α_{2k} et et des b_{2k}, avec $1 \leqslant k \leqslant p$.

2. Dans tout ce qui suit, φ désigne la fonction définie, pour tout $x \in]-1,1[$, par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

(a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(b) Montrer que φ est une solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur $]-1,1[$.

(c) On veut démontrer que $\varphi(x)$ admet $-f(1)$ pour limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

   i. Soit $x \in]-1,1[$ et soit $\theta \in]0,\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$. Démontrer que :

$$\varphi(x) = \frac{-1}{\sin(\theta)} \int_0^\theta f(\cos(u))\mathrm{d}u.$$

   ii. Soit F la fonction définie par :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[\ F(\theta) = \int_0^\theta f(\cos(u))\mathrm{d}u.$$

   Justifier la dérivabilité de F sur $]-\pi,\pi[$ et déterminer sa fonction dérivée F'. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

   iii. Conclure.

(d) On pose maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_1^x \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

   i. Expliciter φ_0 et φ_1 .

   ii. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi_k(x) = -\frac{x^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k}\, \varphi_{k-2}(x).$$

   iii. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que φ_{2p+1} est une fonction polynomiale de degré $2p$.

   iv. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_{2p} de degré $2p-1$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \varphi_{2p}(x) = P_{2p}(x) + \alpha_{2p}\varphi_0(x).$$

   v. Quelles sont les valeurs de k, pour lesquelles les fonctions φ_k admettent une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures ?

(e) Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} b_k\, \varphi_k$ converge simplement vers φ sur $]-1,1[$.