e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B PSI

durée 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Exercice 1

R est le corps des nombres réels et n un entier naturel.

E est le **R** espace vectoriel normé des applications continues de $[-\pi,\pi]$ vers **R** muni de la norme de la convergence uniforme, ainsi pour f élément de E, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$.

On considère un endomorphisme de E noté T vérifiant les deux propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) si f est un élément de E de classe C^1, $\mathrm{T}(f)$ est de classe C^1 et $\mathrm{T}(f') = \mathrm{T}(f)'$.

et

(P_2) pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge dans $\left(\mathrm{E}, \|\ \|_\infty\right)$, la suite $\left(\mathrm{T}(f_n)\right)_n$ converge dans $\left(\mathrm{E}, \|\ \|_\infty\right)$ et $\mathrm{T}(\lim_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n)$.

Pour tout n, $n \geq 1$, on considère les applications c_n et s_n de $[-\pi,\pi]$ vers **R** définies par :

$$c_n(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

On note c_0 l'application de $[-\pi,\pi]$ vers **R** définie par : $c_0(x) = 1$.

Le but de l'exercice est d'établir qu'il existe un réel λ tel que : $\forall f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{T}(f) = \lambda f$.

1° Dans cette question on établit quelques résultats indépendants les uns des autres qui pourront être utilisés dans la suite de l'exercice.

a) On suppose $n \geq 1$. Quelles sont les fonctions réelles solutions sur **R** de l'équation différentielle : $y'' + n^2 y = 0$?

b) Soit f un élément de E. Prouver qu'il existe g et h appartenant à E tels que :

$$f = g + h \quad , \; g \text{ est paire } \; , \; h \text{ est impaire.}$$

c) Soit $\widetilde{\varphi}$ l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, 2π - périodique, telle que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\widetilde{\varphi}(x) = x^2$.

Calculer les coefficients de Fourier réels de $\widetilde{\varphi}$.

Etudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{\varphi}$ (préciser le mode de convergence de cette série et sa somme).

2° Premières propriétés de T.

a) Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$. On pose : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Justifier que S appartient à E, que la série de fonctions $\sum \mathrm{T}(u_n)$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ et que : $\mathrm{T}(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}(u_n)$.

b) Soit f un élément de E, f de classe C^n, $n \geq 1$. Montrer que $\mathrm{T}(f)$ est de classe C^n et que : $\mathrm{T}(f^{(n)}) = \mathrm{T}(f)^{(n)}$.

En déduire que si f est de plus une fonction polynômiale, alors $\mathrm{T}(f)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à celui de f.

3° Etude de $\mathrm{T}(c_n)$ et de $\mathrm{T}(s_n)$.

a) Prouver qu'il existe un réel α_0 tel que : $\mathrm{T}(c_0) = \alpha_0 c_0$ et que pour $n \geq 1$, il existe (α_n, β_n) de $\mathbf{R}^2$, tel que : $\mathrm{T}(c_n) = \alpha_n c_n + \beta_n s_n$.

b) Soit φ l'élément de E défini par : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\varphi(x) = x^2$. Justifier l'existence de (λ, μ, ν) de $\mathbf{R}^3$ tel que : $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, $\mathrm{T}(\varphi)(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$.

c) En déduire que :

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi],\; \lambda x^2 + \mu x + \nu = \alpha_0 \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)\right).$$

d) Montrer que :

i) $\mu = 0$.

ii) $\forall\, n \geq 1, \alpha_n = \lambda$ et $\beta_n = 0$.

iii) $\alpha_0 = \lambda$ et $\nu = 0$.

e) Etablir que pour tout n, $\mathrm{T}(c_n) = \lambda c_n$ et que pour $n \geq 1$, $\mathrm{T}(s_n) = \lambda s_n$.

4° Etude de $\mathrm{T}(f)$.

a) Soit f un élément de E, f de classe C^1, tel que $f(\pi) = f(-\pi)$. On note $\widetilde{f}$ l'application de **R** vers **R**, 2π - périodique, telle que : $\forall\ x \in [-\pi, \pi],\ \widetilde{f}(x) = f(x)$.

Etudier la convergence de la série de Fourier de $\widetilde{f}$. En déduire que : $\mathrm{T}(f) = \lambda f$.

b) Soit f un élément de E, f impaire. Soit F une primitive de f sur $[-\pi, \pi]$. Calculer $\mathrm{T}(F)$.

En déduire que : $\mathrm{T}(f) = \lambda f$.

c) Soit f un élément quelconque de E. Montrer que : $\mathrm{T}(f) = \lambda f$.

Exercice 2

C est le corps des nombres complexes et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
E est un **C**-espace vectoriel de dimension égale à n. On désigne par e l'application identique de E. Soit f un endomorphisme de E. On définit la suite $(f^p)_p$ par : $f^0 = e$ et $f^{p+1} = fof^p$.

S'il existe un entier naturel non nul q tel que $f^q = 0$, l'endomorphisme f est dit nilpotent.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $f_{|\mathrm{F}}$ la restriction de f à F. $f_{|\mathrm{F}}$ est une application linéaire de F vers E. Si de plus F est stable par f, c'est à dire si $f(\mathrm{F})$ est inclus dans F, on pourra aussi considérer $f_{|\mathrm{F}}$ comme un endomorphisme de F.

Première partie : Etude de quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

1° Soit f un endomorphisme de E et p un entier naturel.

a) Prouver que : $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ et que $f\left(\mathrm{Ker}\, f^{p+1}\right) \subset \mathrm{Ker}\, f^p$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. On pose $u = f_{|\mathrm{F}}$.

Ecrire $\mathrm{Ker}\, u$ en fonction de $\mathrm{Ker}\, f$ et de F.

c) Considérer la restriction de f à $\mathrm{Ker}\, f^{p+1}$ notée u pour démontrer que :

$$\dim \mathrm{Ker}\, f^{p+1} \leq \dim \mathrm{Ker}\, f^p + \dim \mathrm{Ker}\, f\ .$$

2° Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

a) Prouver que 0 est la seule valeur propre de f.

b) Etablir que $f^n = 0$.

c) Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à $n-1$.

3° Soit f un endomorphisme nilpotent de E. On suppose que le rang de f est égal à $n-1$.

a) Montrer que : $\forall\ p \in \{0,1,2,\ldots..,n\}$, $\dim \mathrm{Ker}\, f^p = p$ (indication : utiliser l'inégalité établie à la question 1°c) ci-dessus).

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f, de dimension égale à p.

Soit $u = f_{|F}$. Calculer u^p.

c) Démontrer qu'il existe $n+1$ sous-espaces vectoriels de E stables par f et qu'il s'agit des $\operatorname{Ker} f^{p}$, p élément de $\{0,1,2,\ldots\ldots,n\}$.

d) Montrer que : $\forall\ p \in \{0,1,2,\ldots\ldots,n\}$, $\operatorname{Im} f^{p} = \operatorname{Ker} f^{\,n-p}$.

Deuxième partie : Etude des endomorphismes n'admettant qu'un nombre fini de sous-espaces stables.

1° Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f.

a) On considère deux vecteurs a et b appartenant à $\operatorname{Ker}(f-\lambda e)$ et μ un nombre complexe. Vérifier que le sous-espace vectoriel de E engendré par $a+\mu b$, noté V_{μ}, est stable par f.

b) En déduire que si la dimension de $\operatorname{Ker}(f-\lambda e)$ est supérieure ou égale à 2 alors il existe une infinité de sous-espaces de E stables par f.

2° Soit f un endomorphisme de E admettant r valeurs propres distinctes $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$.

On suppose que chaque sous-espace propre de f est de dimension 1 et que le polynôme caractéristique de f, noté $P_f(X)$, est égal à :

$P_f(X)=(-1)^n\prod_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)^{k_j}$ où $r,k_1,k_2,\ldots\ldots,k_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Pour j élément de $\{1,2,\ldots\ldots,r\}$, on pose : $K_j=\operatorname{Ker}(f-\lambda_j e)^{k_j}$.

a) Prouver que E est égal à la somme directe de sous-espaces vectoriels suivante : $\mathrm{E}=K_1\oplus K_2\oplus\ldots\oplus K_r$.

b) Soit j un élément de $\{1,2,\ldots\ldots,r\}$. Démontrer que la dimension de K_j est égale à k_j.

c) Soit j un élément de $\{1,2,\ldots\ldots,r\}$. Prouver que K_j est stable par f.

En considérant $u_j=(f-\lambda_j e)_{|K_j}$, démontrer qu'il existe $1+k_j$ sous-espaces vectoriels de K_j stables par f et qu'il s'agit des $\operatorname{Ker}(f-\lambda_j e)^{p}$, p élément de $\{0,1,2,\ldots\ldots,k_j\}$.

d) Déterminer le nombre N de sous-espaces vectoriels de E stables par f.