ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(option biochimie-biologie)
durée : 2 heures

****

N.B. : les candidats sont priés :

1° D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement, de respecter les notations de l'énoncé.

2° De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.

3° De donner les résultats encadrés.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Les trois exercices sont indépendants.

EXERCICE I

Un bovin d'une race donnée peut être atteint d'insuffisance rénale qui peut être unilatérale ou bilatérale.
On admet que pour cette race la probabilité d'être atteint d'une insuffisance du rein droit est égale à la probabilité d'être atteint d'une insuffisance du rein gauche et que ces deux affections sont indépendantes. On note p cette probabilité.
On désignera par $\overline{E}$ l'événement contraire de l'événement E.
On considère les événements suivants :
Soit M l'événement : « L'animal est atteint d'insuffisance rénale »
Soit D l'événement : « L'animal est atteint d'insuffisance rénale du rein droit »
Soit G l'événement : « L'animal est atteint d'insuffisance rénale du rein gauche »
Soit U l'événement : « L'animal est atteint d'insuffisance rénale unilatérale »
Soit B l'événement : « L'animal est atteint d'insuffisance rénale bilatérale »

1. Justifier l'indépendance des événements $\overline{D}$ et G et des événements $\overline{D}$ et $\overline{G}$.
2. Pour un animal quelconque, calculer en fonction de p les probabilités suivantes :
   a) la probabilité p_M d'avoir au moins un rein atteint.
   b) la probabilité p_0 d'avoir aucun rein atteint.
   c) la probabilité p_1 d'avoir un seul rein atteint.
   d) la probabilité p_2 d'avoir les deux reins atteints.
3. On considère un animal atteint d'insuffisance rénale, calculer la probabilité qu'il ait une insuffisance unilatérale.
4. Soit un animal atteint d'insuffisance rénale du rein droit, calculer la probabilité que son insuffisance soit unilatérale.

EXERCICE II

X désigne une variable aléatoire réelle de densité f_θ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f_\theta : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2} \text{ si } x \in [0, \theta] \\ 0 \text{ si } x \notin [0, \theta] \end{cases} \end{array}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.

1. a) Montrer que f_θ est bien une densité de probabilité.
   b) Déterminer la fonction de répartition F_θ de X.
2. On note $E(X)$ l'espérance mathématique de X et $V(X)$ la variance de X.
   Montrer que : $E(X) = \dfrac{2\theta}{3}$ et que $V(X) = \dfrac{\theta^2}{18}$.
3. Soit n un entier naturel non nul ; on considère n variables aléatoires réelles X_1, X_2, ..., X_n indépendantes et toutes de même loi que X.
   On pose : $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
   a) Calculer l'espérance $E\left(\bar{X}_n\right)$ de $\bar{X}_n$ et la variance $V\left(\bar{X}_n\right)$ de $\bar{X}_n$.
   b) On définit la variable aléatoire T_n par $T_n = \dfrac{3\bar{X}_n}{2}$.
   Calculer l'espérance et l'écart-type de T_n.

4. On note Y la variable aléatoire telle que $Y = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   a) Montrer que Y admet pour densité la fonction g_θ définie par :

$$\begin{array}{rcl} g_\theta : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{2n}{\theta^{2n}} x^{2n-1} \text{ si } x \in [0,\theta] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,\theta] \end{cases} \end{array}$$

   b) Calculer l'espérance et la variance de Y.

EXERCICE III

Un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) admet comme densité l'application f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} ke^{-(x+y)} \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant x \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

où k est un nombre réel.

a) Déterminer le réel k.

b) i. Déterminer les lois de X et Y.

   ii. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Calculer la probabilité suivante : $P(X + Y \leqslant 1)$.