Première partie

1) On a $x(t) = x(0)g(t)$ et $x(t+T) = x(t)e^A$ donc x est T-périodique si et seulement si $A = 0$ (sachant $x \neq 0$).

2a) Toute solution maximale de (E_2) est définie sur $\mathbf{R}$ (thm de Cauchy-Lipschitz linéaire). La formule de Duhamel donne : $x(t) = g(t)\Big(x(0) + \displaystyle\int_{u=0}^{t} \frac{b(u)}{g(u)}\,du\Big)$.

2b) Si x est une solution maximale de (E_2) alors $y : t \longmapsto x(t+T)$ en est aussi une car a et b sont T-périodiques. Et x est T-périodique si et seulement si $x = y$, soit si et seulement si $x(0) = y(0)$ d'après le théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, x est T-périodique si et seulement si $x(0) = x(T)$, soit :

$$x(0)(1 - e^A) = e^A \int_{u=0}^{T} \frac{b(u)}{g(u)}\,du.$$

Lorsque $A \neq 0$ il y a une unique valeur possible pour $x(0)$, donc une et une seule solution maximale T-périodique. Lorsque $A = 0$ il existe des solutions T-périodiques si et seulement si $\displaystyle\int_{u=0}^{T} \frac{b(u)}{g(u)}\,du = 0$, et dans ce cas toute solution maximale de (E_2) est T-périodique.

3a) x est de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, donc la série de Fourier de x converge normalement sur $\mathbf{R}$ vers x.
D'après la relation $\widehat{x'}(n) = in\hat{x}(n)$, on a : $\hat{x}(n) = \hat{b}(n)/(in - k)$.

3b) Lorsque $k = 0$, il s'agit de résoudre l'équation $x' = b$. Les solutions de cette équation sont T-périodiques si et seulement si $\hat{b}(0) = 0$ (classique). Dans ce cas toute solution est T-périodique et vérifie : $\hat{x}(n) = \hat{b}(n)/in$ pour $n \in \mathbf{Z}$ non nul et $\hat{x}(0)$ varie avec la solution considérée.

Deuxième partie

4) Si x vérifie la relation indiquée alors x est solution de (E_3) par calcul immédiat. Si x est solution de (E_3) alors on peut appliquer la formule de Duhamel avec $b(t) = H(x(t), t)$, ce qui donne la relation énoncée.

5) $U_H x$ est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ pour x continue et $A \neq 0$.
Les relations $g(t+T) = e^A g(t)$ et $g(s+T)^{-1} = e^{-A} g(s)$ montrent que $U_H x \in P$ si $x \in P$. Si x est solution de (E_3) alors :

$$\int_{s=t}^{t+T} g(s)^{-1} H(x(s), s)\,ds = \int_{s=t}^{t+T} (x'(s) - a(s)x(s))g(s)^{-1}\,ds = \Big[x(s)g(s)^{-1}\Big]_{s=t}^{t+T} = x(t)g(t)^{-1}(e^{-A} - 1),$$

d'où $U_H x = x$. Réciproquement, si $U_H x = x$ alors x est de classe $\mathcal{C}^1$, $x \in P$ et :

$$x'(t) = a(t)x(t) + \frac{e^A}{1 - e^A} g(t)\Big[g(s)^{-1}H(x(s), s)\Big]_{s=t}^{t+T} = a(t)x(t) + H(x(t), t).$$

6a) On note $\|g\|_T = \sup\{g(u),\ u \in [0, T]\}$ et $\|g^{-1}\|_{2T} = \sup\{g(u)^{-1},\ u \in [0, 2T]\}$.
Si $x \in B_r$ alors pour $t \in [0, T]$ on a par majoration élémentaire : $|U_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon T \alpha_r \|g\|_T \|g^{-1}\|_{2T} e^A/(1 - e^A)$. Pour $r > 0$ fixé le majorant tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0^+$ donc on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et pour tout $x \in B_r$ on ait $\|U_\varepsilon x\| \leqslant r$.

6b) Pour $x, y \in B_r$ et $t \in [0, T]$ on a : $|U_\varepsilon x(t) - U_\varepsilon y(t)| \leqslant \|x - y\| \varepsilon T \beta_r \|g\|_T \|g^{-1}\|_{2T} e^A/(1 - e^A)$. De même que précédemment, le cofacteur de $\|x - y\|$ tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et on peut trouver $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$ tel qu'il soit inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$.

6c) B_r est clairement stable par limite uniforme, c'est donc une partie fermée de l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbf{R},\mathbf{R})$ des fonctions continues bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Comme $\mathcal{C}_b(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est complet pour $\| \ \|$, B_r est complète et pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_1]$ le théorème du point fixe s'applique à $(U_\varepsilon)_{|B_r}$. D'après **5)** on en déduit que (E_4) admet une unique solution dans B_r pour ε suffisament petit (à $r > 0$ fixé).

7) D'après **6)**, $\|x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon\alpha_r\|g\|_T\|g^{-1}\|_{2T}e^A/(1-e^A)$, c'est-à-dire que x_ε converge uniformément vers la fonction nulle lorsque $\varepsilon \to 0^+$. Ceci est moral, puisque la fonction nulle est la seule solution T-périodique de l'équation limite (E_1).

8) En posant $x_0(t) = c_0$ dans **5)** on trouve après calculs : $x_1(t) = -\varepsilon f(c_0)/k$ (fonction constante). La suite des itérées de U_ε sur une fonction constante est donc une suite de fonctions constantes. Elle converge uniformément d'après **6c)** vers x_ε, donc x_ε est une fonction constante et cette constante est définie par l'équation : $kx_\varepsilon + \varepsilon f(x_\varepsilon) = 0$.

9a) Avec les notations de **6a)** et **6b)** on a : $A = -1$, $g(t) = e^{-t}$, $\|g\|_T = 1$, $\|g^{-1}\|_{2T} = e^2$, $\alpha_r = r^2$ et $\beta_r = 2r$.

ε_0 est défini par : $\forall\ \varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $r \geqslant \varepsilon T\alpha_r\|g\|_T\|g^{-1}\|_{2T}\dfrac{e^A}{1-e^A} = \varepsilon\dfrac{r^2e^2}{e-1}$; $\varepsilon_0 = \dfrac{e-1}{re^2}$ convient.

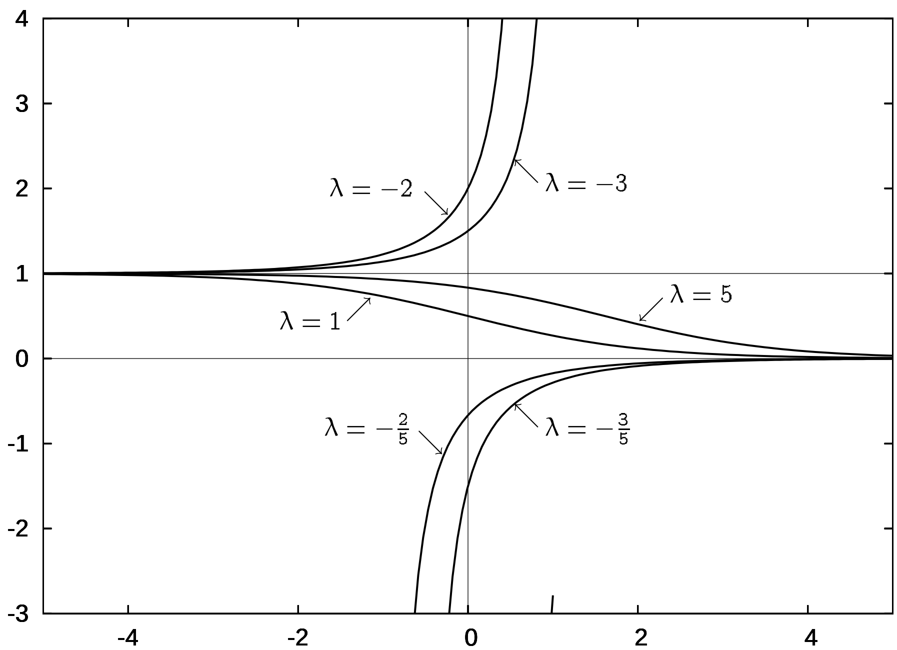
ε_1 est défini par : $\forall\ \varepsilon \in]0,\varepsilon_1]$, $\frac{1}{2} \geqslant \varepsilon T\beta_r\|g\|_T\|g^{-1}\|_{2T}\dfrac{e^A}{1-e^A} = \varepsilon\dfrac{2re^2}{e-1}$; $\varepsilon_1 = \dfrac{e-1}{4re^2}$ convient.

9b) La fonction nulle est clairement solution de (E_5), 1-périodique. Par unicité, $x_\varepsilon = 0$.

9c) On résoud l'équation $x' = -x + \varepsilon x^2$ sans contrainte de périodicité : il y a deux solutions constantes, $x(t) = 0$ et $x(t) = 1/\varepsilon$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, toute autre solution ne prend jamais les valeurs 0 et $1/\varepsilon$. On a alors :

$$\frac{x'}{x(1-\varepsilon x)} = \frac{d}{dt}\Big(\ln\Big|\frac{x}{1-\varepsilon x}\Big|\Big) = -1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{1-\varepsilon x} = \lambda e^{-t} \quad\Longrightarrow\quad x(t) = \frac{\lambda e^{-t}}{1+\varepsilon\lambda e^{-t}},\quad \lambda \in \mathbf{R}^*.$$

La condition $x(0) = \alpha$ donne $\lambda = \dfrac{\alpha}{1-\varepsilon\alpha}$ si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1/\varepsilon$. Dans les cas exceptionnels on a $x(t) = \alpha$ comme justifié ci-dessus. Voici quelques courbes obtenues avec $\varepsilon = 1$:



Troisième partie

La relation : $\forall\ t,\ \varphi(t) \leqslant \eta + \zeta\displaystyle\int_{s=0}^{t}\varphi(s)\,ds \Longrightarrow \forall\ t,\ \varphi(t) \leqslant \eta e^{\zeta t}$ est connue, sous une forme plus générale, sous le nom de *lemme de Gronwall*. Le cas donné dans l'énoncé se démontre de façon élémentaire en constatant que la fonction $t \longmapsto e^{-\zeta t}\Big(\eta + \zeta\displaystyle\int_{s=0}^{t}\varphi(s)\,ds\Big)$ est décroissante.

10) $\theta > 0$ car $|x(0)| < 1$, et on a $x(s) \in [-1, 1]$ pour tout $s \in [0, \theta]$ par définition de θ. Comme $f(0) = 0$ et $|f'|$ est bornée par λ sur $[-1, 1]$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f(u)| \leqslant \lambda|u|$ pour tout $u \in [-1, 1]$. Soit $t \in [0, \theta]$. On a d'après **4)** :

$$|e^{-kt}x(t)| = \left|x(0) + \varepsilon \int_{s=0}^{t} e^{-ks} f(x(s))\,ds\right| \leqslant |x(0)| + \varepsilon\lambda \int_{s=0}^{t} e^{-ks}|x(s)|\,ds,$$

d'où $|e^{-kt}x(t)| \leqslant |x(0)|e^{\varepsilon\lambda t}$ d'après le lemme de Gronwall, ce qui établit l'inégalité demandée.

11) On sait d'après la théorie de Cauchy-Lipschitz et le théorème des bouts qu'une solution maximale de (E_6) définie en 0 est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant 0 et que si $b < +\infty$ alors x n'est pas bornée au voisinage de b^-. Si l'on suppose qu'il existe des réels $t > 0$ tels que $|x(t)| > 1$ alors θ existe et $|x(\theta)| = 1$ par continuité de x. Mais ceci est impossible d'après l'inégalité obtenue à la question précédente pour $t = \theta$. Ainsi, $|x(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in [0, b[$, ce qui implique $|x(t)| \leqslant |x(0)|e^{k+\varepsilon\lambda t}$ pour tout $t \in [0, b[$ toujours d'après la question précédente, et enfin $b = +\infty$ d'après le théorème des bouts.