ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2004

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Courbures des surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Ce problème propose une étude des surfaces de l'espace $\mathbb{R}^3$ et de leurs courbures totale et moyenne. Pour tout entier $n > 0$, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera muni de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement $(\cdot \mid \cdot)$ et $\|\cdot\|$. La première partie est consacrée à des préliminaires algébriques.

Première partie

1. Soient $x^{(1)}$, …, $x^{(n)}$ des éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1,\ldots,n+1}$ les composantes de $x^{(i)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $k = 1, \cdots, n+1$ on note V_k le produit par $(-1)^{k+1}$ du déterminant de la matrice $\left(x_j^{(i)}\right)$ où $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n+1$. On note V le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes V_k.

a) Montrer que V est orthogonal à tous les $x^{(i)}$.

b) Comparer les conditions suivantes :

i) $V = 0$

ii) la famille $\left(x^{(i)}\right)_{i=1,\cdots,n}$ est liée.

c) Exprimer en fonction de $\|V\|$ le déterminant des $n+1$ vecteurs V, $x^{(1)}$, …, $x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. **a)** Montrer que, pour tout n-uple de vecteurs $\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$ linéairement indépendants, il existe un unique vecteur $W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$ ayant les propriétés suivantes

i) $W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$ est de norme 1 et orthogonal à tous les $x^{(i)}$

ii) le déterminant des $n+1$ vecteurs $W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$, $x^{(1)}$, …, $x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est strictement positif.

b) Vérifier que, pour toute rotation R de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a

$$W\left(R(x^{(1)}), \ldots, R(x^{(n)})\right) = R\left(W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)\right).$$

3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, Q la matrice de coefficients $q_{i,j} = (e_i \mid e_j)$.

a) Montrer que Q est inversible et diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

b) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées v_i dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Exprimer le vecteur ligne $(v_1, \ldots, v_n)$ en fonction de Q et du vecteur ligne $((v \mid e_1), \ldots, (v \mid e_n))$.

Dans la suite du problème, on désigne par U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, par $u = (u_1, \ldots, u_n)$ un élément quelconque de U, par F une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$, par $\partial_i F$ (resp. $\partial_i \partial_j F$) ses dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2). On suppose que les n vecteurs $(\partial_i F)(u)$ sont linéairement indépendants pour tout u, et on pose $W(u) = W\left((\partial_1 F)(u), \ldots, (\partial_n F)(u)\right)$.

4. **a)** Vérifier que l'application $u \mapsto W(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Comparer $((\partial_k W)(u) \mid (\partial_i F)(u))$ et $(W(u) \mid (\partial_i \partial_k F)(u))$.

c) Démontrer l'existence et l'unicité de nombres réels $a_{i,j}(u)$ tels que l'on ait

$$(\partial_i W)(u) = \sum_j a_{i,j}(u)(\partial_j F)(u).$$

d) On note respectivement $A(u)$, $S(u)$, $Q(u)$ les matrices de coefficients respectifs $a_{i,j}(u)$, $(W(u) \mid \partial_i \partial_j F(u))$, $((\partial_i F)(u) \mid (\partial_j (F)(u)))$. Vérifier que $A(u) = -S(u)Q(u)^{-1}$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose $n = 2$; on a donc un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une application F de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^3$ telle que les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ soient linéairement indépendants pour tout u de U. On a en outre

$$W(u) = \frac{(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)}{\|(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)\|}$$

où $\cdot \wedge \cdot$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On pose

$$K(u) = \det A(u),\ H(u) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A(u))$$

où $A(u)$ est la matrice définie à la question **4.d)**. On note $F_i(u)$, $i = 1, 2, 3$, les composantes de $F(u)$; on suppose que U contient le point 0 et on fait l'étude de la surface $F(U)$ au voisinage du point $F(0)$.

5. Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$. Montrer que les objets $\hat{K}(0)$ et $\hat{H}(0)$ associés à l'application $\hat{F} = R \circ F$ sont égaux respectivement à $K(0)$ et $H(0)$.

6. On suppose que, pour u suffisamment voisin de 0, $F(u)$ est de la forme

$$F(u) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

avec $f(0) = (\partial_1 f)(0) = (\partial_2 f)(0) = 0$.

a) Calculer $K(0)$ et $H(0)$ en fonction des nombres

$$r = (\partial_1\partial_1 f)(0),\ s = (\partial_1\partial_2 f)(0),\ t = (\partial_2\partial_2 f)(0).$$

b) (Cas d'un cylindre) On suppose que $f(u_1, u_2)$ est fonction de u_1 seul, soit $f(u_1, u_2) = g(u_1)$. Exprimer $H(0)$ en fonction de la courbure de la courbe Γ, intersection du cylindre avec le plan $x_2 = 0$.

7. Dans cette question, on considère le cas d'une surface de révolution :

$$F(u) = (f(u_1)\cos u_2, f(u_1)\sin u_2, u_1)$$

où f est une fonction strictement positive de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle I.

a) Dire pour quelles valeurs de u les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ sont linéairement indépendants.

b) Vérifier que

$$A(u) = f(u_1)^{-1}\left(1 + f'(u_1)^2\right)^{-3/2}\begin{pmatrix} f(u_1)f''(u_1) & 0 \\ 0 & -\left(1 + f'(u_1)\right)^2 \end{pmatrix}.$$

c) Donner une fonction f élémentaire pour laquelle $H(u)$ est nul pour tout u.

d) Montrer que, pour tous nombres réels α et β, $\alpha > 0$, il existe f satisfaisant

$$H(u) = 0 \text{ pour tout } u,\ f(0) = \alpha,\ f'(0) = \beta.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

e) Calculer $K(u)$ pour une telle fonction f.

8. Indiquer, sans aucun calcul, des surfaces pour lesquelles $K(u)$ et $H(u)$ sont des constantes.

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet d'un changement de paramétrage sur les fonctions H et K. Dans la situation du début de la deuxième partie on note $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ la matrice (jacobienne) de coefficients $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)_{i,j} = \partial_j F_i$. Notation analogue pour $\dfrac{\partial W}{\partial u}$.

9. Vérifier que $\dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial u}{}^t A(u)$.

On se donne maintenant un difféomorphisme Φ de U sur un autre ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et on pose $\Psi = \Phi^{-1}$. Pour tout $u \in U$ on écrira aussi $\tilde{u} = \Phi(u)$; on pose $\tilde{F}(\tilde{u}) = F(u)$, c'est-à-dire $\tilde{F} = F \circ \Psi$, et on note $\tilde{W}(\tilde{u})$, $\tilde{A}(\tilde{u})$, $\tilde{K}(\tilde{u})$, $\tilde{H}(\tilde{u})$ les objets définis à partir de $\tilde{F}$ et $\tilde{u}$ comme $W(u)$, $A(u)$, $K(u)$, $H(u)$ l'ont été à partir de F et u. On suppose U connexe par arcs.

10. a) Exprimer $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$, puis $(\partial_1 \tilde{F})(\tilde{u}) \wedge (\partial_2 \tilde{F})(\tilde{u})$ en fonction de $(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)$ et $\det \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tel que l'on ait $\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u)$ pour tout $u \in U$.

c) Exprimer $\tilde{A}(\tilde{u})$ en fonction de ε, $A(u)$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

d) Comparer $\tilde{H}(\tilde{u})$ et $H(u)$, $\tilde{K}(\tilde{u})$ et $K(u)$.