I. S. F. A. 2004-2005

Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

OPTION B

PROBLÈME I

X désigne une variable aléatoire **positive** dont la loi admet une densité de probabilité notée *f.*

On désigne par *S* la fonction (dite fonction de survie) définie pour x ≥ 0 par :

$x \to S(x) = P(X \geq x)$ (le symbole $P(X \geq x)$ désigne la probabilité de l'évènement $X \geq x$).

1°- Exprimer *S* en fonction de la densité *f*. Montrer que *S* est décroissante et donner sa limite quand *x* tend vers +∞.

2°- On suppose que la variable *X* admet une espérance.

Montrer l'inégalité : $xS(x) \leq \int_x^\infty t\, f(t)dt$. Donner la limite du produit *xS(x)* quand *x* tends vers +∞.

Montrer la relation : $Esp(X) = \int_0^\infty S(t)dt$ (*Esp(X)* désigne l'espérance de la variable *X*).

3°- Soit un réel *x* tel que *S(x)* soit strictement positif. Calculer la fonction de répartition de la loi de *X* conditionnée par l'évènement $X \geq x$. Donner une densité de cette loi.

On note $Esp_{X \geq x}(X - x)$ l'espérance de la variable aléatoire *X-x* par rapport à la loi définie ci-dessus.

Montrer la relation : $Esp_{X \geq x}(X - x) = \dfrac{\int_x^\infty S(t)dt}{S(x)}$.

4°- Soit *g* une fonction définie sur R^+, strictement positive et dérivable.

a- Montrer que les fonctions *S* définies et continues sur R^+ et telles que $g(x) = \dfrac{\int_x^\infty S(t)dt}{S(x)}$ vérifient l'équation différentielle : $S'(x)g(x) = -S(x) \times (1 + g'(x))$.

b- On donne pour fonctions *g* successivement les fonctions définies sur R^+ par :

(i) $x \to g(x) = a$

(ii) $x \to g(x) = a + x$

(iii) $x \to g(x) = \dfrac{1}{a + x}$

où *a* désigne une réel positif.

Déterminer, quand cela est possible, pour chacun de ces trois cas les fonctions *S* qui sont des fonctions de survie.

PROBLÈME II

PARTIE A

Un point M se déplace sur un axe suivant les modalités décrites ci-dessous :

a- Les seules positions possibles sont les points d'abscisses 0 , 1 , 2 et 3.

b- X_n désigne l'abscisse aléatoire du point M à l'instant n. (n entier). **A l'instant initial (instant 0) le point M est supposé en position 1.**

c- Entre deux instants consécutifs le point M change de position suivant les règles suivantes :

(i) si à l'instant n le point M est au point d'abscisse i ($i=1$ ou $i=2$) il est à l'instant $n+1$ au point d'abscisse $i-1$ avec une probabilité p et au point d'abscisse $i+1$ avec la probabilité q ($q=1-p$)

(ii) si à l'instant n le point M est au point d'abscisse i ($i=0$ ou $i=3$) il reste à l'instant $n+1$ dans cette position.

d- Les expériences aléatoires associées à chaque changement de position sont indépendantes.

1°- Donner les lois des variables X_1 et X_2.

2°- Plus généralement donner la loi de X_n pour n entier. (On pourra distinguer les cas n impair et n pair).

3°- On note E_0 (respectivement E_3) l'évènement « le point M s'est immobilisé au point d'abscisse 0 » (respectivement 3). Déduire de 2° les probabilités $P(E_0)$, $P(E_3)$.

Quelle est la probabilité pour que le point M finisse par s'immobiliser ?

4°- On note T la variable aléatoire instant où, pour la première fois, le point M atteint l'un des deux points d'abscisse 0 ou 3.

(i) Donner les probabilités $P(T=1)$, $P(T=2)$,..$P(T=k)$,….

(ii) En déduire l'espérance de la variable T. Déterminer la valeur de p pour laquelle cette espérance est maximale. Quelle est alors son expression ?

5°- Donner succinctement les modifications à apporter aux résultats précédents quand à l'instant initial le point M est au point d'abscisse 2.

PARTIE B

On généralise l'expérience décrite en partie A en supposant que les positions possibles du point M sont les points d'abscisses 0,1,….,N. Les points où M s'immobilise sont les points d'abscisse 0 et N.

On suppose que, à l'instant initial (instant 0) M est situé au point d'abscisse *i*.

1°- Préliminaires :

Soit une suite $n \to u_n$ définie pour les entiers {0,1,..,N} par la donnée de :

- u_0 et u_N
- la relation $qu_{n+2} - u_{n+1} + pu_n = 0$

Donner l'expression explicite du terme u_n en fonction de u_0 , u_N et des racines du polynôme $qX^2 - X + p$, racines que l'on calculera.

2°- On note E_0 (respectivement E_N) l'évènement « le point M s'est immobilisé en 0 » (respectivement en N) et $\alpha(i)$ (respectivement $\beta(i)$) la probabilité de E_0 (respectivement E_N) quand le point M est à l'instant initial au point d'abscisse i.

a- Montrer que les suites α et β appartiennent à l'ensemble des suites γ vérifiant pour $i \in \{1,..,N-1\}$: $\gamma(i) = p\gamma(i-1) + q\gamma(i+1)$.

b- En déduire le calcul des probabilités $\alpha(i)$ et $\beta(i)$.

c- Montrer que le point M finit par s'immobiliser avec une probabilité égale à 1.

3°- On note T la variable aléatoire égale à l'instant où, pour la première fois, le point M atteint l'un des deux points d'abscisse 0 ou N.

On note, pour $i \in \{0,..,N\}$ et k entier positif ou nul $w(i,k)$ la probabilité de l'évènement «$T=k$» quand, à l'instant initial, le point M est au point d'abscisse i.

a- Donner les expressions de $w(0,k)$, $w(N,k)$, $w(i,0)$,$w(i,1)$.

b- Montrer la relation : $w(i,k) = pw(i-1,k-1) + qw(i+1,k-1)$ pour k entier strictement positif et pour $i \in \{1,..,N-1\}$.

c- On note $g_i(s)$ la série définie par $g_i(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k w(i,k)$.

(i) Montrer que la série est convergente pour tout réel s de valeur absolue inférieure ou égal à 1.

(ii) Donner les expressions de $g_0(s)$ et $g_N(s)$.

(iii) Montrer la relation $g_i(s) = spg_{i-1}(s) + sqg_{i+1}(s)$ pour $i \in \{1,..,N-1\}$.

(iv) En déduire le calcul des fonctions $g_i(s)$. Comment à l'aide de ce calcul pourrait-on obtenir la loi de la variable T ?