INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

Epreuve de Mathématique I

3 heures

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ et $\| \ \|_1$ la norme de la convergence en moyenne sur E, définie par :

$$\forall f \in E, \quad \| f \|_1 = \int_0^2 | f(x) | \, \mathrm{d}x$$

L'objet du problème est l'étude de courbes intégrales d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(1-x)^p \, y' + a(x) \, y = 0$$

où p désigne un entier naturel strictement positif et a une fonction appartenant à E.

Partie 1

1) On note $\| \ \|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E, définie par :

$$\forall f \in E, \quad \| f \|_\infty = \text{Sup } \{ | f(x) | \, ; \; x \in [0,2] \}$$

a) Trouver la plus petite constante réelle c vérifiant

$$\forall f \in E, \quad \| f \|_1 \leqslant c \, \| f \|_\infty$$

b) Existe-t-il une constante réelle d vérifiant

$$\forall f \in E, \quad \| f \|_\infty \leqslant d \, \| f \|_1 \, ?$$

c) Montrer que l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0,2]$ et dérivables en tout point x de la réunion $[0,1[\, \cup \,]1,2]$ est une partie dense de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_1)$
(on pourra utiliser le théorème de Weierstrass : toute fonction réelle continue sur un segment est, sur ce segment, la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales).

2) Pour tout entier naturel strictement positif n, on note g_n la fonction définie sur le segment $[0,2]$ par :

$$\forall \, x \in [0,2], \quad g_n(x) = \sqrt[n]{|x^n - 1|}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel strictement positif n, la fonction g_n est un élément de E. En quels points est-elle dérivable ?

b) Montrer que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction g, que l'on précisera.

c) La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur le segment $[0,2]$?

d) La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur l'intervalle $[0,1[$?

3) a) Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée, que la suite de terme général $\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et de limite égale à $\frac{5}{2}$.

b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_1)$?

c) L'ensemble des fonctions de E qui s'annulent au point 1 est-il une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_1)$?

Partie 2

Dans cette partie, indépendante des deux autres, on étudie la vitesse de convergence de la suite des intégrales des fonctions g_n, sur $[0,1]$ et sur $[0,2]$.

1) a) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, la fonction $x \longrightarrow \ln(1-x^n)$ est intégrable sur l'intervalle $[0,1[$.

b) Quelle est la limite de l'intégrale $J_n = \int_0^1 \ln(1-x^n)\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers l'infini ?

c) Démontrer que la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$ et justifier l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

d) En admettant l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, démontrer que, lorsque n tend vers l'infini, on a l'équivalence :

$$J_n \sim -\frac{\pi^2}{6n}$$

2) a) Justifier, pour tout nombre réel négatif ou nul u, la double inégalité :

$$1+u \leqslant \mathrm{e}^u \leqslant 1+u+\frac{u^2}{2}$$

b) Établir, pour tout entier strictement positif n, la double inégalité :

$$\frac{J_n}{n} \leqslant \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x - 1 \leqslant \frac{J_n}{n} + \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \big(\ln(1-x^n)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

c) Déduire des résultats précédents un équivalent simple de $1 - \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$, lorsque n tend vers l'infini.

3) Démontrer que, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{3n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Partie 3

Dans cette partie, on considère un nombre entier p strictement positif et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions appartenant à E, à valeurs strictement comprises entre 0 et 1.

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'unique application dérivable de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f_n(0) = 1 \\ \forall x \in [0,1[, \quad (1-x)^p\, f_n'(x) + a_n(x) f_n(x) = 0 \end{cases}$$

1) Dans cette question et la suivante, l'entier n est considéré comme fixé.

a) Donner une expression de $f_n(x)$ sous forme exponentielle.

b) Démontrer que la fonction f_n est décroissante sur $[0,1[$ et de limite nulle en 1.

c) Montrer qu'en prolongeant f_n par la valeur 0 en 1, on obtient une fonction de classe C^1 sur le segment $[0,1]$ si et seulement si l'entier p est au moins égal à 2.

d) Pour quelles valeurs de p l'équation différentielle $(1-x)^p\, y' + a_n(x)\, y = 0$ admet-elle une solution sur $[0,2]$ autre que la fonction nulle ?

2) a) Démontrer que la fonction $x \longrightarrow \sqrt{1+f_n'(x)^2}$ est intégrable sur $[0,1[$ et établir l'inégalité :

$$\int_0^1 \sqrt{1+f_n'(x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 2$$

b) Établir, pour tout élément x de $[0,1[$, l'inégalité

$$\int_x^1 \sqrt{1+f_n'(t)^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \sqrt{(1-x)^2+f_n(x)^2}$$

et en donner une interprétation géométrique.

3) On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur tout segment inclus dans l'intervalle $[0,1[$.

a) Montrer que, pour tout réel strictement positif ε, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1-\epsilon} \sqrt{1+f_n'(x)^2}\,dx$ tend vers $1-\varepsilon$ quand n tend vers l'infini.

b) Utiliser les inégalités établies dans la question précédente pour prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sqrt{1+f_n'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2$$

4) a) Trouver un entier q et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E tels que la fonction g_n, définie dans la première partie, soit, sur chacun des deux intervalles $[0,1[$ et $]1,2]$, solution de l'équation différentielle :

$$(1-x)^q\, y' + b_n(x)\, y = 0 \qquad (e_n)$$

b) Justifier, pour tout entier n strictement positif, l'existence et l'unicité d'un élément h_n de E vérifiant :

$$\begin{cases} h_n(0) = h_n(2) = 1 \\ \forall x \in [0,1[\cup]1,2], \quad (1-x^n)h_n'(x) + x^{n-1}h_n(x) = 0 \end{cases}$$

c) Trouver la limite des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+h_n'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+h_n'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers l'infini.

ISUP

INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

Epreuve de Mathématique II

4 heures

Notations et rappels.

Dans tout le problème, le corps de scalaires est $\mathbb{R}$ et n désigne un entier naturel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E (c'est-à-dire des applications linéaires de E dans E).
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On note Id_E l'identité de E. On rappelle que $u^0 = \mathrm{Id}_E$, que $u^1 = u$, que $u^2 = u \circ u$, etc.
- On dit que u est nilpotent s'il existe un entier naturel k tel que $u^k = 0$. On définit alors son indice (de nilpotence) par

$$\alpha(u) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid u^k = 0\} ;$$

  on a donc $\alpha(u) \geqslant 1$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E, on dit que F stable par u si $u(F) \subset F$.

Étant donné un entier naturel p non nul, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre p. On note I_p la matrice identité.
On définit de même que ci-dessus la notion de matrice nilpotente et l'indice d'une matrice nilpotente.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels à une indéterminée.
Dans la suite, le mot *polynôme* désignera toujours un élément de $\mathbb{R}[X]$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal n, c'est-à-dire :

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leqslant n\}.$$

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
On note $\mathcal{C} = (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}_n = (X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I.

Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$ et $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.
3. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ. Expliciter la matrice de Δ_n relative à la base $\mathcal{C}_n$.
4. L'endomorphisme Δ_n est-il diagonalisable ?
5. L'endomorphisme Δ_n est-il nilpotent ?
6. L'endomorphisme Δ est-il nilpotent ?
7. Donner sans démonstration les résultats analogues pour D.

Partie II.

1. On note A et B les matrices respectives de D_2 et Δ_2 dans la base canonique $\mathcal{C}_2 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, expliciter A^k et B^k.
2. On considère la matrice
$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On note (E_1) l'équation matricielle $M^2 = J_1$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Exhiber deux solutions distinctes de (E_1).
3. Soit M une solution de (E_1). On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à M. Soit $g = f \circ f$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.
   (b) Montrer que f admet une unique valeur propre, qu'on précisera.
   (c) En déduire toutes les solutions de (E_1).
4. On considère la matrice
$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On note (E_2) l'équation matricielle $M^2 = J_2$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que (E_2) n'admet aucune solution.

Partie III.

Dans cette partie E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 3$.
Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, on note

$$\mathsf{Com}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\},$$

$$\mathsf{Pol}(f) = \{P(f) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n.
Soit $u' \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n-1$.

1. Montrer que $\mathsf{Pol}(f)$ et $\mathsf{Com}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$. Est-ce que ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$?
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par :

$$\begin{cases} n_{i,j} = 1 & \text{si } j = i+1, \\ n_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, donner une base de $\operatorname{Ker} u^k$.
4. Montrer que $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $= \mathsf{Pol}(u)$.
5. Soit $w \in \mathsf{Com}(u)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par w.
6. Montrer que la matrice de w dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
7. Montrer que $\mathsf{Com}(u) = \mathsf{Pol}(u)$. En déduire la dimension de $\mathsf{Com}(u)$.
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E telle que la matrice de u' dans $\mathcal{B}'$ soit $N' = (n'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par :

$$\begin{cases} n'_{i,j} = 1 & \text{si } j = i+1 \text{ et } j \leqslant n-1 \\ n'_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Déterminer la dimension de $\mathsf{Com}(u')$.

Partie IV.

Toutes les matrices étudiées dans cette partie sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$.
Une matrice U est dite unipotente si $U - I_n$ est nilpotente.
Si A est une matrice nilpotente on note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k, \tag{1}$$

$$\ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k. \tag{2}$$

1. Exhiber deux matrices nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente. Même question pour le produit.
2. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent (c'est-à-dire telles que $AB = BA$).
   (a) Montrer que AB est nilpotente et que $\alpha(AB) \leqslant \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.
   (b) Montrer que $A+B$ est nilpotente et que $\alpha(A+B) \leqslant \alpha(A)+\alpha(B)-1$. Donner un exemple où cette inégalité est en fait une égalité.
3. Soit A une matrice nilpotente d'indice $r \geqslant 2$.
   (a) Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q de même degré d (qu'on exprimera en fonction de r) tels que $\exp(A) = P(A)$ et $\ln(I_n + A) = Q(A)$.
   (b) Montrer que pour x réel tendant vers 0,
   $$Q(P(x) - 1) = x + o(x^d), \tag{3}$$
   $$P(Q(x)) = 1 + x + o(x^d). \tag{4}$$
4. Montrer que les relations (1) et (2) permettent de définir deux applications bijectives et réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes.
5. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent exprimer $\exp(A + B)$ en fonction de $\exp(A)$ et $\exp(B)$.
6. Soient U et V deux matrices unipotentes qui commutent exprimer $\ln(UV)$ en fonction de $\ln(U)$ et $\ln(V)$.
7. Sur quel sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il possible de définir l'exponentielle d'une matrice par la relation (1) ? Dans ce cadre plus général, que dire de $\exp(M_1 + M_2)$, $\exp(M_1)$ et $\exp(M_2)$ si M_1 et M_2 commutent ?

Fin du sujet.

INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

CONCOURS D'ENTRÉE 2004

Epreuve de Mathématique III

3 heures

NOTATIONS

On considérera des fonctions de variable réelle, à valeurs complexes, périodiques, admettant 2π comme période. On dit qu'une telle fonction est continue par morceaux si l'intervalle $]-\pi, \pi[$ peut être décomposé en un nombre fini (dépendant de f) de sous-intervalles (a_i, a_{i+1}) :

$$-\pi = a_o < a_1 < a_2 < \dots\ a_i < \dots < a_n = \pi$$

tels que f soit continue sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$, admette une limite à gauche de a_{i+1} :

$$f(a_{i+1}-) = \lim_{\substack{y \to a_{i+1} \\ <}} f(y)$$

et admette une limite à droite de a_i :

$$f(a_i+) = \lim_{\substack{y \to a_i \\ >}} f(y)$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux et $\mathcal{C}^o$ le sous-ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction f appartenant à $\mathcal{C}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, en outre, f admet, sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$, une dérivée f ' et si, en outre, cette dérivée admet une limite à gauche de a_{i+1} et une limite à droite de a_i.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques, continues par morceaux et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On note $\mathcal{D}$ [resp. $\mathcal{F}$] le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ [resp. $\mathcal{E}$] constitué des fonctions vérifiant en tout point :

$$2 f(x) = f(x-) + f(x+)$$

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on note :

$$c_p(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-ipt}}{2\pi} dt$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n(f)(x) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f) e^{ipx}$$

I. ETUDE GENERALE

1) Donner les relations d'inclusion qui lient les espaces :

$$\mathcal{C}\ ,\ \mathcal{C}^{\circ}\ ,\ \mathfrak{D}\ ,\ \mathfrak{E}\ ,\ \mathfrak{F}.$$

2) Montrer que les fonctions de $\mathcal{C}$ sont bornées.
3) En déduire l'existence des $c_p(f)$.
4) Montrer que, sur $\mathfrak{D}$:

$$v_1(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |\ f(t)\,|\ dt$$

est une norme.

5) Montrer que :

$$v_2(f) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\ f(t)\,|^2\ dt \right)^{1/2}$$

est une norme euclidienne associée au produit hermitien :

$$< f\,,\,g > = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\,g(t)\ dt$$

6)Montrer que $\{\ \varepsilon_p = \dfrac{e^{ipt}}{\sqrt{2\pi}}\ :\ p \in \mathbb{Z}\ \}$ est un système orthonormé pour ce produit hermitien.

7) Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2\pi\ \left(\sum_{k=-n}^{n} |\ c_k(f)\,|^2 \right)^{1/2} \ \leq\ v_2(f).$$

8) En déduire que $c_k(f)$ tend vers 0 lorsque k tend vers $\pm\infty$.

II. SOMMES DE DIRICHLET

L'espace $\mathcal{C}$ est muni de la loi de composition :

$$f * g\,(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(x-t)dt$$

1) Cette loi de composition est-elle interne à $\mathcal{C}$? , à $\mathcal{C}^{\circ}$?
2) Montrer que $f * g = g * f$
3) Est-elle associative ?
4) Montrer que :

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi}\ f * D_n$$

où :

$$D_n\,(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

5) Montrer que :

$$D_n(x) = \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

6) Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\ dt \ = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ D_n(t)\,|\ dt\ \to\infty\ ,\ \text{lorsque } n \to\infty,$$

Dans la suite, nous allons étudier une fonction continue dont les sommes de Fourier , $S_n(f)$, ne convergent pas ponctuellement vers f.

III. UNE ETUDE PARTICULIERE

1) Soit $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π périodique, telle que

$$\forall x \in [\,0, \pi],\qquad f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[\left(2p^3+1\right)\frac{x}{2}\right].$$

Vérifier l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n,k} = \int_0^\pi \cos\, nt \sin \frac{(2k+1)t}{2}\, dt,$$

$$\forall q \in \mathbb{N},\ s_{q,k} = \sum_{i=0}^{q} x_{i,k}$$

Montrer que :

$$x_{n,k} = \frac{k+\frac{1}{2}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-k-\frac{1}{2}}\right)$$

3)Montrer que, si $q \geq k$

$$2s_{q,k} = \frac{1}{k+\frac{1}{2}} + \sum_{i=q-k}^{q+k} \frac{1}{i+\frac{1}{2}}$$

4) En déduire que $s_{q,k} \geq 0$, pour tout $(q, k) \in \mathbb{N}^2$

5) Montrer que $2s_{k,k} \geq \displaystyle\sum_{i=0}^{2k} \int_{i+\frac{1}{2}}^{i+\frac{3}{2}} \frac{dt}{t}$

6) En déduire que : $s_{k,k} \geq \dfrac{\ln k}{2}$

7) On s'intéresse à la série de Fourier de f en 0 :

$$S_n = S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)$$

et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \frac{\cos(kt)}{\pi}\, dt$$

Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^\pi \sin\left[(2p^3+1)\frac{t}{2}\right] \cos\, nt\, dt,$

(en justifiant soigneusement cette formule) et calculer $a_k(f)$ en fonction des $s_{p,q}$

8) Montrer que

$$S_n(f)\ (0) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\ s_{n,2p^3-1}$$

9) En déduire que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ S_{2p^3-1} \geq \frac{1}{p^2}\ s_{2p^3-1,\,2p^3-1} \geq \frac{1}{2p^2} \log(2^{p^3-1}) = \frac{p^3-1}{2p^2} \log 2$$

10) Ceci montre que $S_{2p^3-1} \to +\infty$, conclure.

IV. ETUDE D'UN EXEMPLE ET RETOUR SUR LA DEMONSTRATION DU THEOREME DE DIRICHLET

On considère la fonction de 2π-périodique

$$f(x) = -\pi - x \quad \text{si } -\pi \leq x < 0$$

$$f(x) = \pi - x \quad \text{si } 0 \leq x \leq \pi$$

1) Calculer ses coefficients de Fourier

2) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\, c_n(f)\,| = +\infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\, c_n(f)\,|^2 < \infty$

3) Montrer que $\left| \sum_{p=1}^{m} \frac{\sin(px)}{p} \right|$ est majoré par une constante indépendante de m et de x.

4) Montrer que, si l'on pose

$$g_1(t) = \begin{cases} h(x-t)\cot g\left(\frac{t}{2}\right), & \text{si } \delta \leq |\,t\,| \leq \pi \\ 0, & \text{si } |\,t\,| \leq \delta \end{cases}$$

et

$$g_2(t) = \begin{cases} h(x-t)\ \cot g\left(\frac{t}{2}\right), & \text{si } \delta \leq |\,t\,| \leq \pi \\ 0, & \text{si } |\,t\,| \leq \delta \end{cases}$$

et si $h \in \mathcal{C}$, on peut écrire :

$$\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} h\,(x\text{-}t)\ D_n(t)\ \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(t)\sin(nt)\ \frac{dt}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} g_2(t)\ \cos(nt)\ \frac{dt}{2\pi}$$

$$= \mathrm{Im}\left[\int_{-\pi}^{\pi} g_1(t)\ e^{int}\ \frac{dt}{2\pi}\right] + \mathrm{Re}\left[\int_{-\pi}^{\pi} g_2(t)\ e^{int}\ \frac{dt}{2\pi}\right]$$

5) Montrer que les deux intégrales tendent vers 0 si n tend vers l'infini

6) En déduire une démonstration du théorème de Dirichlet pour les fonctions de $\mathcal{C}$.