Centrale 2005 PSI - Epreuve 1
durée : 4 heures
calculatrices autorisées

Dans tout le problème on identifie les polynômes et les fonctions polynômes correspondantes.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On pose

$$I_p(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} t^p \, dt$$

On ne cherchera pas à calculer I_0.

Partie I.

I.A. Déterminer le développement en série entière de x de la fonction

$$x \mapsto (1+x^2)e^{x^2}$$

I.B. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \; : \; y' - xy = (1+x^2)e^{x^2/2}$$

I.B.1. Donner la solution générale de l'équation (E).
On désigne par f la solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

I.B.2. Donner l'expression de f. Montrer que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur réelle de x, notée α.

I.B.3. On se propose de calculer une valeur approchée de α par la méthode de Newton.

a. Déterminer préalablement un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ de longueur $0,1$ contenant α. Rappeler le principe de la méthode de Newton et expliquer comment on peut l'appliquer à partir de l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$.

b. Ecrire un algorithme, mettant en oeuvre la méthode de Newton, permettant de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-6} près. On utilisera le langage de programmation associé au logiciel de calcul formel utilisé.

c. déterminer par l'algorithme mis en place une valeur approchée de α à10^{-6} près.

Partie II.

II.A.

II.A.1. Calculer I_1.

II.A.2. Trouver une relation entre I_p et I_{p-2} pour $p \geq 2$.

II.B.

II.B.1. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante λ_k et un polynôme A_k tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; I_{2k+1}(x) = \lambda_k + e^{-x^2/2} A_k(x)$$

II.B.2. Déterminer λ_k et A_k.

II.C.

II.C.1. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe une constante μ_k et un polynôme B_k tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_{2k}(x) = \mu_k I_0(x) + e^{-x^2/2} B_k(x)$$

II.C.2. Déterminer μ_k et le degré de B_k.

II.D.

II.D.1. Si le degré de P est égal à n, que peut-on dire du degré du polynôme $1 + P'(x) - xP(x)$?

II.D.2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $I_0(x) + P(x)e^{-x^2/2}$ soit une constante.

Partie III.

Soit ϕ l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$$

III.A.

III.A.1. Montrer que ϕ est une application linéaire sur E.

III.A.2. Déterminer le noyau de ϕ.

III.A.3. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

III.A.4. Expliciter $\phi^{-1}(g) = \{f \in E/\ \phi(f) = g\}$ à l'aide d'une constante C et de $\int_0^x e^{-t^2/2} g(t)\, dt$.

III.B.

III.B.1. Quelle est l'image de f par $\phi \circ \phi$?

III.B.2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

III.C. On pose par convention $\phi^1 = \phi$ et, plus généralement, on définit, pour tout entier $n \geq 2$, ϕ^n par

$$\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi = \phi \circ \phi^{n-1}$$

III.C.1. Résoudre $\phi^2(f) = 0$.

III.C.2. Résoudre $\phi^n(f) = 0$.

Partie IV.

Soit ϕ_0 l'application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \phi_0(P) = \phi(P)$$

IV.A. ϕ_0 est-elle injective ? surjective ?

IV.B.

IV.B.1. Montrer que pour tout n entier naturel, $X^{2n+1} \in \phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.B.2. En déduire que tout polynôme impair appartient à $\phi_0(\mathbb{R}[X])$.

IV.C. Pour tout q, entier strictement positif, on définit le polynôme Q_q :

$$Q_q(X) = X^{2q} - (2q-1)X^{2q-2}$$

IV.C.1. Déterminer un polynôme P tel que $Q_q = \phi_0(P)$.
On désigne par $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\{Q_q/\ q \in \mathbb{N}^*\}$.

IV.C.2. Montrer que pour tout entier naturel non nul q, le polynôme $X^{2q} - \mu_q$ est élément de $\mathcal{P}$.
On pourra remarquer que : $\frac{Q_k(X)}{\mu_k} = \frac{X^{2k}}{\mu_k} - \frac{X^{2k-2}}{\mu_{k-1}}$.

IV.C.3. Montrer que les sous-esapces vectoriels $Vect(X, X^3, \ldots, X^{2n+1}, \ldots)$ et $\mathcal{P}$ sont en somme directe.

IV.C.4. Montrer que $Im(\phi_0) = Vect(X, X^3, \ldots, X^{2n+1}, \ldots) \oplus \mathcal{P}$.

Partie V.

On considère l'équation diffféentielle

$$(1)\ :\ y' - xy = (1+x^2)e^{x^2}$$

et on définit la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^x (1+t^2)e^{t^2/2}\, dt$$

V.A. Donner la solution générale de l'équation (1) (l'expression de cette solution utilise la fonction H).

V.B. Déterminer une fonction g, impaire, développable en série entière et solution de l'équation (1). Quel est le rayon de convergence de son développement en série entière ?

V.C. A l'aide des questions précédentes calculer :

$$\int_0^x (1+t^2)e^{t^2/2}\, dt$$