École de l'Air - PC / PSI - 4 heures

L'exercice et le problème sont indépendants

Exercice : Autour d'équations polynômiales

On note de la même façon un polynôme et sa fonction associée.
On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant est 1.

I et **II** sont indépendantes.

I - Entiers algébriques

Un complexe a est dit entier algébrique s'il existe un polynôme P **unitaire à coefficients entiers** tel que $P(a) = 0$.

Ainsi $b = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, racine de $X^2 + 3X + 1$, est un entier algébrique.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $X^2 + bX + 1$, où b est le réel défini précédemment. On veut montrer que z est un entier algébrique. (il est inutile de calculer une expression explicite de z)

   Soient $e_1 = 1$, $e_2 = b$, $e_3 = z$, $e_4 = bz$.

   (a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ **à coefficients entiers** telle que $M \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que z est un entier algébrique. On calculera un polynôme P à coefficients entiers unitaire dont z est racine.

2. Soit maintenant z une racine complexe de $X^3 + bX^2 + X + 3$. Quels complexes $e_1, ..., e_k$ (k à définir) et quelle matrice introduirait-on pour montrer que z est un entier algébrique?

II - changement d'inconnue polynômial dans une équation polynômiale.

1. K est un corps commutatif. $M \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P \in K[X]$. Montrer que si $\lambda \in K$ est valeur propre de M, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(M)$.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de $X^3 + 2X^2 + X + 3$ et $b = a^2 + a - 1$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de M.

   (b) Calculer un polynôme non nul dont b est racine.

3. Généralisation

   (a) Si $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, calculer le polynôme caractéristique de M.

   (b) Si $a \in \mathbb{C}$ est racine de $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ et $b = Q(a)$ où $Q = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + ... + b_1X + b_0 \in \mathbb{C}[X]$, comment obtenir un polynôme dont b est racine?

Problème: Etude qualitative des solutions d'une équation différentielle

On note (E) l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x)+q(x)f(x) = 0$ où $q(x) = 1+\dfrac{1}{1+x^2+x^4}$ et S l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E).

1. Enoncer le théorème d'existence et d'unicité du problème de Cauchy. Que sait-on sur S?

2. Si $f \in S$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3. **Inégalité de Gronwall**
   Soient $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \leq a(x)h(x)$.

   Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \Longrightarrow h(y) \leq h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)dt\right)$.

   On pourra étudier $x \mapsto h(x) \exp\left(\int_x^y a(t)dt\right)$

   Dans les questions 4 et 5, f est une solution de (E)

4. **Les solutions sont bornées.** Soit $h = f^2 + (f')^2$.

   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) \leq (1 - q(x))h(x)$.

   (b) En déduire que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

   (c) Utilisant une fonction auxiliaire, montrer que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}^-$, et donc finalement sur $\mathbb{R}$.

5. **Conditions de nullité en un point**

   (a) On suppose qu'existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f'(a) = 0$. Que peut-on dire?

   Redémontrons ce résultat sans utiliser le cours.

   (b) Montrer que $\forall x \in [a, +\infty[$, $h(x) \leq 0$, où h est la fonction définie au 4. Qu'en conclure sur $f(x)$?.

   (c) Soit $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto f(a - x)$. Déterminer $r \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\Phi'' + r\Phi = 0$.

   (d) Montrer que $f = 0$.

   Dans les questions 6 et 7, f est une solution non nulle de (E)

6. **Les zéros sont isolés**

   (a) On suppose qu'existe une suite (x_n) de réels distincts deux à deux convergeant vers un réel x et tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$.
   Montrer que $f(x) = f'(x) = 0$. Conclusion?

   (b) On admettra ici le théorème de Bolzano-Weierstrass : "si (x_n) est une suite de réels bornée, alors (x_n) admet une suite extraite convergente".
   Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $[a, b]$.

7. **Comparaison avec les solution de l'équation limite $y'' + y = 0$**

   (a) Donner les solutions de $(F) : y'' + y = 0$.

   On va montrer que f s'approche en $+\infty$ par une solution de (F).

   (b) Montrer qu'il existe d'uniques fonctions a, b de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x) \\ \\ f'(x) = -a(x)\sin(x) + b(x)\cos(x) \end{cases}$$

   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a'(x) = (q(x) - 1)\sin(x)f(x) \\ \\ b'(x) = (1 - q(x))\cos(x)f(x) \end{cases}$

   (d) Montrer que a et b admettent des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$

   (e) Justifier enfin que f s'approche en $+\infty$ par une solution de (F).

8. **Etude (partielle) du développement en séries entières des solutions de (E).**

   (a) Soit f une solution de (E) développable en serie entière sur un certain intervalle non trivial centré en 0 sur lequel $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

      i. Vérifier que :

$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} c_2 = -c_0 \\ c_3 = -\dfrac{1}{3}c_1 \\ \\ c_4 = -\dfrac{1}{12}c_0 - \dfrac{1}{3}c_2 \\ \\ c_5 = -\dfrac{1}{20}c_1 - \dfrac{8}{20}c_3 \\ \forall n \in [\![4, +\infty[\![,\ c_{n+2} = \dfrac{-n^2 + n - 2}{(n+2)(n+1)}c_n + \dfrac{-n^2 + 5n - 7}{(n+2)(n+1)}c_{n-2} - \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}c_{n-4} \end{cases}$$

      ii. Soit $\beta > 2$. Montrer que si n est assez grand, $|c_{n+2}| \leq \beta \max(|c_n|, |c_{n-2}|, |c_{n-4}|)$.

      iii. Soit $\beta > 2$. Montrer qu'existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \leq C\beta^n$.

      iv. Que dire du rayon de convergence de f?

   (b) Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$