Mines 2005 PSI - Epreuve 2
durée : 3 heures
calculatrices interdites

Les différentes parties sont indépendantes. ceci étant, la plus grande attention sera apportée à l'unité de votre travail. La résolution intégrale de partie sera hautement appréciée.

Ce problème traite des applications de la notion de supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel, et de ses applications tant en algèbre qu'en analyse ou en géométrie.

Les théorèmes du cours utilisés lors de la résolution de ce problème devront être énoncés avec précision, leurs hypothèses devront être soigneusement vérifiées.

Dans ce texte, $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ représente l'ensemble des fonctions numériques, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour deux espaces vectoriels E et F, $\mathcal{L}(E,F)$ représente l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

I. Deux exemples simples de supplémentaires.

1. Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit F le sous-espace vectoriel constitué des fonctions paires. Donner un supplémentaire de F dans E.

2. Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel constitué des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.
   Montrer qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2, que l'on déterminera explicitement, telles que tout élément f de F se décompose de manière unique sous la forme :
$$f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2 \ \text{ avec } \ (\alpha_f, \beta_f) \in \mathbb{R}^2$$

3. Déterminer l'unique matrice A telle que l'on ait, pour tout $f \in F$,
$$\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$$

4. Montrer que $G = \{g \in E \ \text{ telle que } \ g(0) = g'(0) = 0\}$ est un supplémentaire de F dans E.

II. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que f est diagonalisable.

6. Montrer que le plan (P) d'équation $x - y + z = 0$ est stable par f.

7. Déterminer un supplémentaire de (P) stable par f.

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

   i- L'endomorphisme f est diagonalisable.

   ii- Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

III. Supplémentaires et calcul différentiel.

La définition suivante permet d'étendre les notions de famille génératrice et de famille libre, aux espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et I un ensemble d'indices non nécessairement fini.

- Une famille $(e_i, i \in I)$ est dite génératrice de E lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire d'une sous famille finie $(e_i, i \in J)$ de $(e_i, i \in I)$.
- Une famille $(e_i, i \in I)$ est dite libre dans E lorsque toute sous-famille finie de cette famille est libre.

Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit la fonction

$$f_{i,j}(x,y) = x^i y^j$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f_{i,j},\ (i,j) \in \mathbb{N}^2)$. On pose

$$\Delta\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} E & \to & E \\ f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & & \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \Phi\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} E & \to & E \\ f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & & \end{array}\right.$$

Pour $g \in F$, on note gF l'ensemble des fonctions qui s'écrivent gf avec $f \in F$.

9. Prouver que la famille $(f_{i,j}, (i,j) \in \mathbb{N}^2)$ est libre.
10. Montrer que les restrictions $\tilde{\Delta}$ (respectivement $\tilde{\Phi}$) de Δ (respectivement Φ) à F sont des endomorphismes de F.
11. Déterminer $Ker(\tilde{\Phi})$.
12. Montrer que $F = xyF \oplus Ker(\tilde{\Phi})$.
13. Soit le changement de variables :

$$w\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \end{array}\right.$$

ainsi que l'application

$$L\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} F & \to & E \\ f & \mapsto & f \circ w \end{array}\right.$$

Montrer que L est un automorphisme de F.

14. Montrer que $L(Ker(\tilde{\Delta})) = Ker(\tilde{\Phi})$.
15. Montrer que $L[(x^2 - y^2)F] = uvF$.
16. Déterminer un supplémentaire de $Ker(\tilde{\Delta})$ dans F.

IV. Supplémentaires et géométrie.

17. Soient trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriel : E, F et G. On suppose G de dimension finie. On se donne $g \in \mathcal{L}(E,G)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

   i. Il existe $h \in \mathcal{L}(G,F)$ tel que $f = h \circ g$.
   ii. $Ker(g) \subset Ker(f)$.

18. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(k+1)$ formes linéaires non nulles notées f_i pour $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. On note $H_i = Ker(f_i)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

   i. L'inclusion suivante est satisfaite :

$$\bigcap_{i=1}^{k} H_i \subset H_{k+1}$$

   ii. Il existe $(a_1, /dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i$$

   Indication : on utilisera éventuellement l'application :

$$\phi \; : \; \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \end{array} \right.$$

19. On considère, dans cette question, l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne canonique, que l'on rapporte à un repère orthonormé. Soit (D) la droite définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \; z = 0, \; y = x\}$. Soit également (S) la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 10 = 0$$

   En utilisant ce qui précède, déterminer les équations cartésiennes des plans contenant (D) et tangents à (S).

FIN DU PROBLEME